

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Kombinace: matematika (pro 3. stupeň škol) – zeměpis (pro 2. stupeň)

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V REOLOGICKÝCH MODELECH

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN RHEOLOGICAL MODELS

Diplomová práce: 05–FP–KMD–002

Autor:

Ivana KEHÁROVÁ

Podpis:

.....

Adresa:

Koněvova 1866

511 01, Turnov

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.

Počet

stran	slov	obrázků	pramenů
119	11 692	37	16

V Liberci dne 16.5.2005

Katedra: *matematiky a didaktiky matematiky*

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

Diplomant: *Ivana KEHÁROVÁ*
Adresa: *Koněvova 1866, 511 01 TURNOV*
Obor: *matematika (pro 3. stupeň škol) – zeměpis*

Název DP: *DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE
V REOLOGICKÝCH MODELECH*
Název DP v angličtině: *DIFFERENTIAL EQUATIONS
IN RHEOLOGICAL MODELS*

Vedoucí práce: *prof. RNDr. Jana Přivratská, CSc. Ph.D.*
Termín odevzdání: *květen 2005*

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP lze zakoupit v Edičním středisku TU a jsou též k dispozici v UK TUL, na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické.

V Liberci dne 1. 6. 2004


.....
vedoucí katedry


.....
děkan

Převzal(a) diplomant(ka):

Datum: *10. 1. 2005*

Podpis: *Keháron'1.*

Název diplomové práce:**DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V REOLOGICKÝCH MODELECH**

(Differential equation in rheological models)

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.

Úvod:

V případě, že je popis mechanických vlastností příliš složitý nebo nás nezajímá detailní informace o chování materiálu, vytváří se tzv. reologické modely, které simulují makroskopické chování různých režimech mechanického namáhání. Pokud tyto modely obsahují vazké členy, je závislost deformace a napětí popsána obyčejnou diferenciální rovnicí, obvykle prvního nebo druhého řádu.

Cíl:

- Sestavit několik modelů, které by vystihovaly chování netkaných textilií v zátěžových a relaxačních testech.
- Sestavit a vyřešit příslušné rovnice.
- Vyřešit inverzní úlohu, tj. stanovení vstupních parametrů modelu z experimentálně naměřených závislostí.

Požadavky:

Řešení obyčejných diferenciálních rovnic, základy reologie.

Doporučená literatura:

Rychnovský, R.: *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení*,

Polytechnická knižnice, Praha, 1972.

Sobotka, Z.: *Reologie hmot a konstrukcí*, Academia, Praha, 1981.

Bharanitharam, R. - Jirsák, O. - Přívratská, J.: *Modeling of Compressional Properties of Highloft Textiles*, In.: Strutex, pp. 427-431, Liberec 2003.

Přívratská, J. – Jirsák, O.- Bharanitharam, R.: *Maxwell-Kelvin Model for Highloft Materiale*, In.: Proceedings of PANM 12, (v tisku)

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne: 16. 05. 2005

Ivana Kehárová

Poděkování

Děkuji všem, kteří mi byli nápomocni při vypracování práce. Především chci poděkovat Prof. RNDr. Janě Přívratské, CSc. Ph.D., vedoucí diplomové práce, za zasvěcené vysvětlování problémů a za podnětné rady, které přispěly ke zkvalitnění obsahu práce.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V REOLOGICKÝCH MODELECH

KEHÁROVÁ Ivana

DP–2005

Vedoucí DP: Prof. RNDr. J. Přívratská, CSc. Ph.D.

Resumé

V práci jsou řešeny modifikované reologické modely (Kelvinovy, Maxwellovy, Poyntingovy-Thompsonovy a Zenerovy hmoty), v nichž u pružného prvku byla lineární závislost ($\sigma = k\varepsilon$) napětí na deformaci (přetvoření) nahrazena závislostí kvadratickou ($\sigma = k\varepsilon^2$). Byly popsány režimy kdy bylo buď napětí, nebo deformace konstantní.

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN RHEOLOGICAL MODELS

Summary

In the diploma work were solved modified rheological models (Kelvin's, Maxwell's, Poyting – Thompson's and Zener's material), in which at the elastic element was a linear dependence of stress on deformation ($\sigma = k\varepsilon$) was substituted by a quadratic dependence ($\sigma = k\varepsilon^2$). There were described some methods, in which either the stress or the deformation were unchanged.

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DEN RHEOLOGIEMODELLEN

Zusammenfassung

In der vorliegenden Diplomarbeit sind die modifizierten Modelle (Kelvin, Maxwell, Poynting-Thompson und Zener) gelöst, bei denen die lineare Abhängigkeit der Spannung auf der Deformation eines elastischen Elementen durch eine quadratische Abhängigkeit ersetzt wurde. Es wurden Regime mit konstanter Spannung oder Deformation beschrieben.

Obsah

Úvod	8
1. Diferenciální rovnice.....	9
1.1. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu	10
1.2. Obecné řešení diferenciální rovnice	11
2. Existence a jednoznačnost řešení diferenciální rovnice 1. řádu	13
2.1. Geometrická interpretace	13
2.2. Existence a jednoznačnost řešení dané diferenciální rovnice	14
3. Řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.....	21
3.1. Separace proměnných	22
3.2. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu.....	25
3.3. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu - homogenní	25
3.4. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu - nehomogenní	27
4. Obsah a úkoly reologie	32
4.1. Základní reologické látky	33
5. Reologické modely	36
5.1. Kelvinův model.....	37
5.2. Maxwellův model	42
6. Kvadratická závislost pružného prvku.....	50
6.1. Modifikovaný Kelvinův model.....	50
6.2. Modifikovaný Maxwellův model	58
7. Skládání reologických modelů.....	66
7.1. Poyntingova-Thompsonova hmota	66
7.2. Modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty I.	76
7.3. Modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty II.....	82
7.4. Modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty III.	94
8. Zenerova hmota	101
8.1. Modifikovaný model Zenerovy hmoty I.....	106
8.2. Modifikovaný model Zenerovy hmoty II.	112
9. Závěr	117
10. Literatura	119

Úvod

Pro vystižení chování látek, pro jejich klasifikaci a jednotnou definici, se zavádějí reologické modely. Modely jsou používány jako náhražka zjišťování vztahu mezi zatížením a deformací. Aplikací reologických modelů lze snadno vytvořit simulaci chování materiálu v různých režimech mechanického namáhání. Různou kombinací reologických elementů vznikají více či méně vhodné reologické modely. V diplomové práci jsem se zaměřila na nejjednodušší reologické modely, které popisují viskoelastické chování. Viskoelastická je vlastnost látky spočívající v časové závislosti vztahu deformace a napětí. Vztah časově závislého napětí a deformace popisují diferenciální rovnice s materiálovými konstantami. Diferenciální rovnice zredukujeme na rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty a závisle proměnnou může být jak napětí, tak deformace. Pro popis viskoelastického chování nám postačí spojení základních prvků reologických modelů a to ideální pružiny a viskózního elementu. Reálné chování hmoty můžeme popsat se značnou přesností, i když i zde najdeme nedůslednost viskoelastických modelů. Příkladem nedůslednosti nejpoužívanějších modelů je dávání přednosti kombinacím pružných a viskózních členů a opomíjení třecích elementů. Ve struktuře textilie vzniká množství třecích míst, ve kterých se mechanická energie přeměňuje na tepelnou a bezesporu existuje vzájemný posun vláken a nití při deformaci vyšší textilní struktury. Avšak třecí prvek s konstantním parametrem nedává realitě odpovídající řešení. Experimenty ukazují, že ani klasické viskoelastické modely plně nevystihují chování netkané textilie při stlačování.

V úvodní části shrneme teoretické poznatky o obyčejných diferenciálních rovnicích prvního řádu, definice, základní věty s důkazy a popis metod řešení s příklady jejich aplikace.

Ukážeme si pouze základní reologické modely a sestavení diferenciálních rovnic prvního řádu, které charakterizují chování materiálu nebo výrobku. Základní viskoelastické modely popisují lineární závislost mezi napětím a deformací ($\sigma = k\varepsilon$). Naším úkolem bude sestavení modifikovaných modelů, kde není lineární, ale kvadratická závislost ($\sigma = k\varepsilon^2$). A především zaměřit se na chování materiálu v mechanických režimech.

1. Diferenciální rovnice

Pod pojmem diferenciální rovnice budeme rozumět rovnici, ve které neznámou je funkce jedné nebo více proměnných, přičemž v rovnici vystupuje nejen tato funkce, ale také její derivace. Budeme předpokládat, že funkce, vystupující jako neznámá v rovnici, je funkcí jedné nebo více reálných proměnných.

Jestliže neznámá funkce, která v rovnici vystupuje, je funkcí pouze jedné nezávisle proměnné, potom derivace, které spolu s neznámou funkcí v rovnici vystupují, jsou obyčejnými derivacemi a podle toho typu rovnice nazýváme **obyčejnými diferenciálními rovnicemi** nebo krátce diferenciálními rovnicemi (příklad 1.1). V případě, že funkce, která v rovnici vystupuje, je funkcí několika proměnných, potom derivace této funkce, které spolu s neznámou vystupují, jsou parciálními derivacemi a podle toho takové rovnice nazýváme **parciálními diferenciálními rovnicemi** (příklad 1.2). V teorii diferenciálních rovnic se setkáváme také se soustavami diferenciálních rovnic. Je-li dáno m diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí (nemusí být obecně $m = n$), mluvíme o soustavě diferenciálních rovnic (příklad 1.3).

Řád nejvyšší derivace s nenulovým koeficientem v dané diferenciální rovnici nazýváme *řádem* této rovnice [11].

V následujících kapitolách nám však postačí znalosti o obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu, abychom mohli zkoumat chování jednotlivých reologických modelů.

Příklad 1.1

$$y'' + xy'^3 - e^y = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu.

Příklad 1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - u = 0$$

je parciální diferenciální rovnice třetího řádu pro neznámou funkci $u(x, y)$.

Příklad 1.3

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

je soustava partiálních diferenciálních rovnic třetího řádu pro dvě neznámé funkce $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$.

1.1. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 1.1.

Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu nazveme vztah (platný v určitém oboru) mezi neznámou funkcí, její první derivací a nezávisle proměnnou. Je-li tento vztah možno vyjádřit funkcí, potom obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru [11]

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

nebo ve speciálním případě, je-li rozřešena vzhledem k y' , tvaru [11]

$$y' = f(x, y). \tag{1.2}$$

Definice 1.2.

Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu rozumíme rovnici [11]

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.3}$$

nebo, je-li rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci, rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.4}$$

Jestliže přitom je f lineární funkcí v proměnných $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, můžeme (1.3) psát ve tvaru

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = h(x). \quad (1.5)$$

Diferenciální rovnici tvaru (1.5) nazýváme lineární diferenciální rovnicí n -tého řádu a to homogenní, je-li $h(x) = 0$, nehomogenní (nebo také s pravou stranou), je-li $h(x) \neq 0$ [2].

Definice 1.3.

Řešením čili integrálem (také partikulárním integrálem nebo integrální křivkou, vyjadřujeme-li řešení geometricky) rovnice (1.3) nazýváme každou funkci $y = g(x)$, která v uvažovaném oboru vyhovuje identicky rovnici (1.3) [11].

Poznámka 1.

V našich úvahách probíhá x zpravidla nějaký interval I . Funkce $y = g(x)$ je řešením rovnice (1.3) v intervalu I , má-li v I derivace do n -tého řádu včetně a dosadíme-li do (1.3) $g(x)$ za y , $g'(x)$ za y' atd., je rovnice (1.3) splněna v I pro každé x .

1.2. Obecné řešení diferenciální rovnice

Máme-li řešit diferenciální rovnici, musíme:

- 1) Nalézt všechny integrály diferenciální rovnice;
- 2) Nebo aspoň zodpovědět jednak otázku, zda určitými počátečními podmínkami je určen aspoň jeden integrál, jednak, otázkou, jakými počátečními podmínkami je určen jediný integrál.

Poznámka 2.

Na první otázku uvedenou v bodu 2 nalezneme odpověď ve větě o existenci řešení a na druhou ve větě o jednoznačnosti řešení. Než budeme formulovat obě věty, bude vhodné nejdříve interpretovat diferenciální rovnici a její řešení geometricky.

Nyní naznačíme, jakých metod použijeme, abychom splnili bod 1. K nejjednodušším diferenciálním rovnicím prvního řádu v explicitní formě, je rovnice

$$y' = f(x) \quad (1.6)$$

$$\text{tj. } dy/dx = f(x) \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\text{tedy } dy = f(x) dx$$

kde $f: R \times R$ je daná funkce.

Máme-li určit všechna řešení této diferenciální rovnice, stačí najít na intervalu množinu všech primitivních funkcí k funkci f . Protože funkce f je spojitá na intervalu I , existuje k ní primitivní funkce. Rovnice (1.6) má nekonečně mnoho řešení, jež lze psát ve tvaru [12]

$$y = F(x) + C, \quad (1.7)$$

kde $F(x)$ je nějaká primitivní funkce k funkci $f(x)$ a C je libovolná konstanta. Vztah (1.7) značí všechna řešení rovnice (1.6). Je tedy (1.7) obecné řešení diferenciální rovnice a víme, že další řešení již neexistují. Často toto obecné řešení zapisujeme ve tvaru [12]

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (1.8)$$

Jestliže konstantě v rovnici (1.8) dáme určitou číselnou hodnotu, dostaneme z obecného řešení tzv. řešení partikulární (částečné). Zpravidla je partikulární řešení určeno hodnotou funkce $f(x)$ pro jistou hodnotu $x = x_0$, kde x_0 patří intervalu řešení. Hodnoty $y = 0$ pro $x = x_0$ nazýváme počátečními podmínkami a vzhledem k tomu někdy mluvíme o partikulárním řešení, které vyhovuje daným počátečním podmínkám [15].

2. Existence a jednoznačnost řešení diferenciální rovnice 1. řádu

2.1. Geometrická interpretace

Diferenciální rovnice ve tvaru

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

kde $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných, je definovaná na určité množině M . Jak lze řešit rovnici (2.1) geometricky? Integrály rovnice (2.1) tvoří v rovině xy integrální čáry, kde směrnice tečny v bodě $[x, y]$ je dána číslem y' určeným rovnicí (2.1). Každému bodu $[x, y]$ množiny M přiřazuje rovnice (2.1) směr tečny integrální čáry, která prochází tím bodem [12].

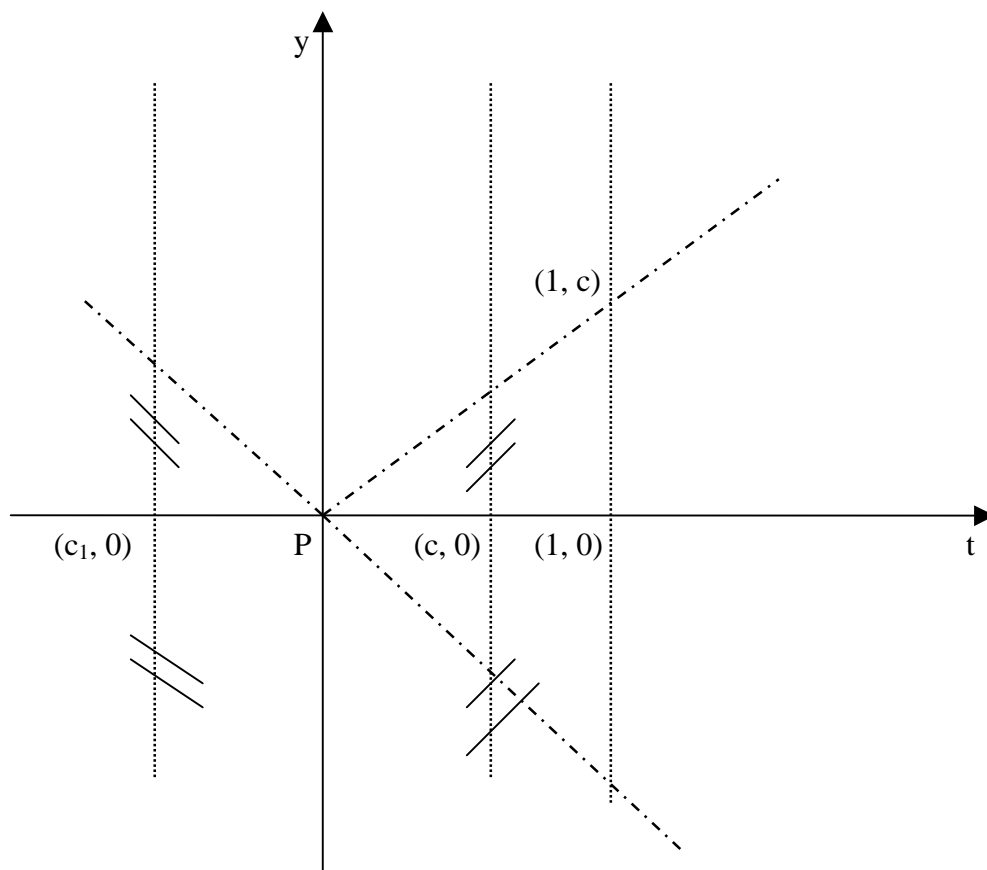
Část roviny, ve které je každému bodu přiřazen určitý směr, nazýváme *směrovým polem*. Množinu bodů, kterým je přiřazen jistý směr, nazýváme *izoklínou směrového pole*. Podle toho definuje rovnice (2.1) v oboru M směrové pole. Rovnici izoklíny obdržíme, když v rovnici (2.1) položíme $y' = k$; rovnice izoklíny je tedy ve tvaru $f(x, y) = k$, kde k je konstanta. Ve všech bodech izoklíny mají tečny k integrálním čarám též směr [12].

Geometrická interpretace řešení rovnice (2.1) znamená najít čáry, jejichž tečna v každém bodě má směr směrového pole určeného rovnicí (2.1). Celá nekonečná soustava integrálních křivek určuje směrové pole a tvoří množinu všech řešení diferenciální rovnice.

Příklad 2.1.

V kartézské soustavě souřadnic znázorníme směrové pole diferenciální rovnice $y' = t$.

Řešení: Množinou je celá rovina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Izoklínami jsou přímky o rovnici $t = c$, $c \in \mathbb{R}$. Směr, který patří přímkám příslušným k bodům této izoklíny, určíme tak, že bod $[1, c]$ spojíme s počátkem P kartézské soustavy (viz obr. 1). Z tvaru tohoto směrového pole je možno usoudit, že integrální křivky dané diferenciální rovnice jsou podobné parabolám, jejichž osa je souřadná osa y [15].



Obr. 1. Znázornění směrového pole

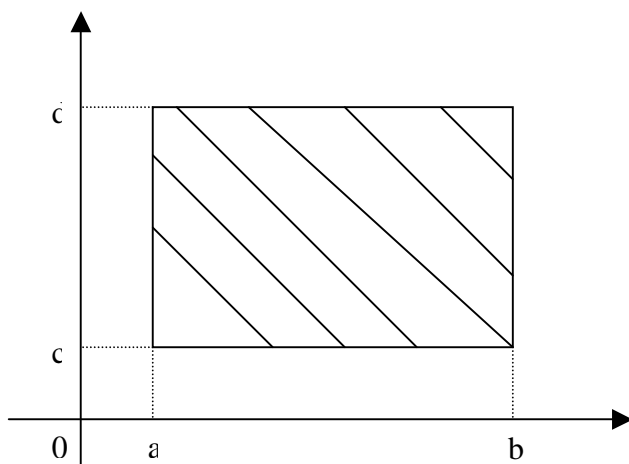
2.2. Existence a jednoznačnost řešení dané diferenciální rovnice

U rovnice ve tvaru

$$y' = f(x, y), \quad (2.1)$$

nás zajímá otázka existence jednoznačnosti řešení. Vyslovíme a následně dokážeme větu, která udává podmínky, za kterých má daná rovnice řešení a to jediné.

Nechť $a < b$ a $c < d$. Množinu bodů $[x, y]$, pro které platí $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, nazýváme uzavřeným obdélníkem (obr. 2). Jsou to body, které leží na obvodě a uvnitř obdélníka ohraničeného přímkami $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.



Obr. 2. Znázornění definičního oboru

Poznámka 2.

Jestliže v rovnici (2.1) předpokládáme pouze to, že funkce $f(x, y)$ je spojitá v I , potom platí pouze věta o existenci řešení. První toto tvrzení dokázal Peano. První důkaz věty o existenci a jednoznačnosti řešení podal Cauchy. Následně uvedeme důkaz založený na metodě postupných aproximací, kterou užil k důkazu věty o existenci a jednoznačnosti jako první Picard [2].

Věta 2.1. (o existenci řešení)

Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá v uzavřeném obdélníku, jehož vnitřním bodem je $[x_0, y_0]$, pak v jistém intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$, kde $h > 0$, existuje aspoň jedno řešení $y = g(x)$ diferenciální rovnice (1) vyhovující počáteční podmínce $g(x_0) = y_0$ [12].

Geometricky: Jsou-li splněny předpoklady věty o existenci řešení, existuje aspoň jedna integrální čára jdoucí bodem $[x_0, y_0]$.

Může nastat situace, že daným bodem $[x_0, y_0]$ prochází více řešení diferenciální rovnice (1), tj. existuje více řešení $y = y(x)$ splňujících počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$. Pro aplikace je důležitá otázka, kdy daným bodem prochází jenom jedno řešení. Na tuto otázku odpovídá věta o jednoznačnosti řešení.

Důkaz:

Budiž $[x_0, y_0] \in I$, takže $[x_0, y_0]$ je vnitřním bodem I . Snadno vidíme, že rovnice $y' = f(x, y)$ s počátečními podmínkami x_0, y_0 je ekvivalentní rovnicí [2]

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (2.2)$$

Tuto integrální rovnici budeme řešit postupnými aproximacemi.

Zvolme nejdříve $\delta > 0$ tak, že čtverec $B = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta \rangle$ bude celý ležet v I . To jistě lze, neboť $[x_0, y_0]$ je vnitřním bodem I . Funkce $f(x, y)$ je podle předpokladů věty spojitá v I a tím spíše v B a tedy omezená v B . Odtud plyne existence čísla M tak, že $|f(x, y)| \leq M$ pro $[x, y] \in B$. Položme [2]

$$h = \min\left(\delta; \frac{\delta}{M}\right)$$

potom $h > 0$ a $H = \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle \times \langle y_0 - h, y_0 + h \rangle \subset B \subset I$.

Sestrojme posloupnost aproximací následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \\ &\bullet \\ &\bullet \\ &\bullet \\ y_n &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \\ &\bullet \\ &\bullet \\ &\bullet \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ukážeme, že je-li $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$, je bod $[x, y_n] \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta \rangle = B \subset I$. Je-li $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ je $[x, y_0] \in H \subset B$ a tedy $|f(x, y_0)| \leq M$. Dále [2]

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq M|x - x_0| \leq hM \leq \delta.$$

Odtud plyne, že

$$y_1 \in \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta \rangle$$

takže bod $[x, y_1] \in B$ a tedy $|f(x, y_1)| \leq M$;

$$|y_2 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \right| \leq M |x - x_0| \leq \delta$$

takže bod $[x, y_2] \in B$ a znovu dostáváme $|f(x, y_1)| \leq M$. Postupně zřejmě dostaneme [2]

$$|y_2 - y_n| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \right| \leq M |x - x_0| \leq \delta$$

takže skutečně $[x, y_n] \in B$.

Dokážeme nyní, že posloupnost funkcí $\{y_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$, definována vztahy (2.2) v intervalu $\langle x_0 - h; x_0 + h \rangle$, konverguje v tomto intervalu stejnosměrně.

Posloupnost funkcí $\{y_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ je v intervalu $\langle x_0 - h; x_0 + h \rangle$ omezená, neboť

$$|y_n(x)| = |y_n(x) - y_0 + y_0| \leq |y_n(x) - y_0| + |y_0| \leq \delta + |y_0|$$

dále, ze spojitosti $\frac{\partial f}{\partial y}$ v B plyne existence čísla N tak, že pro libovolné dva body

$[x, y_1] \in B, [x, y_2] \in B$ platí [2]

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

a tedy

$$|y - y_0| \leq M |x - x_0|$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_0)] dx \right| \leq \int_{x_0}^x N |y_1 - y_0| dx \leq \int_{x_0}^x NM |x - x_0| dx = \frac{MN}{1 \cdot 2} |x - x_0|^2$$

obdobně dále dostaneme [2]

$$|y_3 - y_2| \leq \frac{M \cdot N^2}{3!} |x - x_0|^3$$

•
•
•

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n$$

Je-li $m > n$, dostaneme [2]

$$\begin{aligned} |y_m(x) - y_n(x)| &= |y_m(x) - y_{m-1}(x) + y_{m-1}(x) - y_{m-2}(x) + \dots - y_n(x)| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{MN^{k-1}}{k!} h^k \end{aligned}$$

Dále, řada $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{MN^{k-1}}{k!} h^k$

ke konvergentní, jak se snadno přesvědčíme např. D'Alembertovým kritériem a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{MN^{k-1}}{k!} h^k$$

je zbytek této řady. Je-li tedy n, m dostatečně velké, je tento zbytek libovolně malý.

Tedy k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro $m, n > n_0$ bude [2]

$$|y_m(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

pro každé $x \in \langle x_0 - h; x_0 + h \rangle$. Ale je to Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci. Tím jsme dokázali, že posloupnost $\{y_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ v intervalu $\langle x_0 - h; x_0 + h \rangle$ konverguje k jisté funkci $y(x)$ a že tato konvergence je stejnoměrná, plyne ze známé věty, že funkce $y(x)$ je také spojitá v intervalu $\langle x_0 - h; x_0 + h \rangle$. Protože pro každé $x \in \langle x_0 - h; x_0 + h \rangle$ je $y_n(x) \in \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta \rangle$, plyne odtud, že $y_n(x) \in \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta \rangle$. Dále, ze stejnoměrné konvergence plyne, že platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

takže pro funkci $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x)$ platí rovnice (10) tj.

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Přechodem k derivaci dostaneme

$$y' = f(x)$$

takže funkce $y(x)$ vyhovuje také diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$ pro každé $x \in \langle x_0 - h; x_0 + h \rangle$. Tím je dokázána existence řešení [2].

Věta 2.2. (o jednoznačnosti řešení)

Nechť funkce $f(x, y)$ a její parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v uzavřeném dvojrozměrném intervalu $I_1 \times I_2$ obsahujícím bodem $[x_0, y_0]$. Potom v jistém intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$, kde $h > 0$, existuje právě jedno řešení $y(x)$ diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ [12].

Důkaz:

Nechť $z(x)$ je jediné řešení, které vyhovuje daným počátečním podmínkám tzn.

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z) \text{ a } z(x_0) = y(x_0) = y_0. \text{ Předpokládejme, že existuje } x \in \langle x_0 - h; x_0 + h \rangle \text{ tak,}$$

že platí [2]

$$x \in \langle x_0; x_0 + \varepsilon \rangle.$$

Protože $z(x_0) = y_0$, můžeme psát

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, z(x)) dx.$$

Podle předcházejícího platí [2]
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx.$$

Tedy

$$|z(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, z(x)) - f(x, y(x))] dx \right| \leq N \int_{x_0}^x |z(x) - y(x)| dx,$$

kladná funkce $|z(x) - y(x)|$ je spojitá v intervalu $\langle x_0; x_0 + \varepsilon \rangle$ a tedy existuje $\xi \in \langle x_0; x_0 + \varepsilon \rangle$ tak, že [2]

$$\vartheta = |z(\xi) - y(\xi)| = \max_{x \in \langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle} |z(x) - y(x)|$$

dále [2]
$$\vartheta = |z(\xi) - y(\xi)| \leq N \int_{x_0}^{\xi} |z(x) - y(x)| dz \leq N \vartheta |\xi - x_0| \leq N \vartheta \varepsilon.$$

Tedy celkem máme
$$\vartheta \leq N \vartheta \varepsilon \Rightarrow 1 \leq N \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

což je spor, neboť podle předpokladu je $\varepsilon < \frac{1}{N}$. Tím je dokázaná věta a důkaz zakončen.

Poznámka 3.

Ve větě o jednoznačnosti řešení se objevuje pojem parciální derivace. Tento pojem nemusí být neznámý stačí jen, když do funkce $f(x, y)$ dosadíme za x pevnou hodnotu x_0 ; tím dostaneme funkci jedné proměnné y , totiž funkci $g(y) = f(x_0, y)$, a parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ se pak definuje takto: Má-li funkce $g(y) = f(x_0, y)$ tj. funkce jedné proměnné y , derivaci v bodě y_0 , tj. existuje-li limita [12]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

pak tuto derivaci nazýváme parciální nebo částečnou derivací funkce $f(x, y)$ podle y v bodě $[x_0, y_0]$.

Podobně lze vyslovit definici parciální neboli částečné derivace funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$. Bod $[x_0, y_0]$ může být ovšem libovolný vhodný bod z oboru funkce $f(x, y)$; proto zpravidla píšeme x, y místo x_0, y_0 , tj. existuje takové $\delta > 0$, že $(x_0 - \delta, x_0 - \delta) \times (x_0 - \delta, x_0 - \delta)$ náleží oboru [12].

Poznámka 4.

Podmínka, že $y' = f(x, y)$ je spojitá v $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (x_0 - h, x_0 + h)$, může být nahrazena poněkud slabší tzv. Lipschitzovou podmínkou, která požaduje existenci čísla N tak, že nerovnost [2]

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2| \quad (2.4)$$

platí pro libovolné dva body $[x, y_1], [x, y_2]$ z $(x_0 - h, x_0 + h)$.

3. Řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ splňuje předpoklady věty 2.1. Pak každým bodem $[a, b]$ z definičního oboru funkce f prochází právě jedno řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$. Je tedy zřejmé, že množina řešení diferenciální rovnice je nekonečná, že řešení je nekonečně mnoho. Fixujeme-li v počáteční podmínce první souřadnici a měníme-li b , zjistíme, že řešení je jednoznačně určeno konstantou b , tj. závisí na jedné konstantě.

Definice 3.1. Necht' je dána diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

a necht' funkce f splňuje předpoklady věty 2.1. Říkáme, že funkce dvou proměnných

$$y = F(x, C) \quad (3.2)$$

je obecné řešení diferenciální rovnice (3.1), jestliže platí:

1. Pro každé pevné C (z nějakého intervalu) je funkce $y = F(x, C)$, chápána jako funkce proměnné x , řešením diferenciální rovnice (3.1);
2. Ke každému řešení $y = g(x)$ diferenciální rovnice existuje číslo C takové, že platí

$$g(x) = F(x, C) \quad (3.3)$$

pro všechna x z definičního oboru funkce g .

Řešení funkce $F(x, C)$ diferenciální rovnice, které závisí na nezávisle proměnné x a na nějaké konstantě C , nazývá se obecné řešení. Zvolíme-li tuto konstantu pevně, dostaneme řešení, které se nazývá partikulární [5].

Obecné řešení tedy „obsahuje“ všechna partikulární řešení a naopak, každé partikulární řešení je „obsaženo“ v řešení obecném.

V některých speciálních případech umíme nalézt obecné řešení. Pak při řešení počáteční úlohy postupujeme ve dvou krocích:

- 1) Najdeme nejprve obecné řešení $y = F(x, C)$;
- 2) Z počáteční podmínky určíme hodnotu konstanty C .

Příklad 3.1. Nalezněte řešení počáteční úlohy $y' = y - x$, $y(0) = 1$.

Řešení:

Jak se dozvíme později, má obecné řešení zadané rovnice tvar $y = Ce^x + x + 1$, kde C je libovolná konstanta.

Dosazením počáteční podmínky $x = 0$, $y = 1$ dostaneme rovnici $1 = C + 1$, kde $C = 0$.

Řešením počáteční úlohy je funkce $y = x + 1$.

3.1. Separace proměnných

Je-li dána diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = f(x, y)$$

bude nás zajímat nejenom otázka existence a jednoznačnosti řešení, ale také metody, kterými lze toto řešení nalézt. K základním metodám patří metoda separace proměnných. Lze jí ovšem řešit jen některé typy diferenciálních rovnic 1. speciálního tvaru [9]

$$y' = M(x) \cdot N(y), \tag{3.4}$$

kde M, N jsou spojité funkce jedné reálné proměnné.

Rovnice (3.4) představuje součin dvou funkcí, z nichž každá je funkcí pouze jedné proměnné. Je-li číslo b kořenem rovnice $N(y) = 0$, je funkce $y = b$ řešením rovnice $y' = M(x) N(y)$, jen pro takové intervaly, v nichž je funkce M definována.

Předpokládejme, že definiční obor funkce M je otevřený interval I a že definiční obor funkce N je otevřený interval J a v něm je funkce $N(y)$ různá od nuly. Necht' $y = g(x)$ je nějaké řešení rovnice (3.4), pak platí rovnice

$$g'(x) = M(x) \cdot N(g(x)) \quad / : N(g(x))$$
$$\frac{g'(x)}{N(g(x))} = M(x),$$

daný vztah integrujeme podle x .

Na levé straně obdržíme

$$\int \frac{g'(x)}{N(g(x))} dx = \left[\begin{array}{l} \text{subst. } g(x) = y \\ g'(x)dx = dy \end{array} \right] = \int \frac{dy}{N(y)},$$

a tak dostaneme výsledný vztah

$$\int \frac{dy}{N(y)} = \int M(x)dx. \quad (3.5)$$

Rovnice (3.5) představuje závislost mezi proměnnými x a y , a protože v rovnici jsou neurčité integrály, vystupuje v ní jedna libovolná konstanta. Vztah (3.2) má tedy tvar $F(x, y, C) = 0$, neboli obecné řešení rovnice (3.4). Za předpokladu, že již umíme integrovat, spočítáme oba integrály.

Jak vyplývá vztah (3.5) z rovnice (3.4)? Derivaci y' lze zapsat jako podíl diferenciálů dy, dx , a tedy z (3.4) dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = M(x) \cdot N(y). \quad (3.6)$$

Vztah (3.6) upravíme vynásobením dx a vydělením $N(y)$, dostaneme

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x)dx. \quad (3.7)$$

Z této rovnice dostaneme vztah (3.5) použitím operace integrování. Podstatné je, že v rovnici (3.7) jsou proměnné x, y separovány, což znamená, že na levé straně vystupuje u diferenciálu dy pouze funkce proměnné y a na pravé straně je u diferenciálu dx funkce proměnné x . Přechod od rovnice (3.6) k rovnici (3.7) se nazývá separace proměnných [9].

Příklad 3.2.

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = -x/y$.

Řešení: Vztah napíšeme nejdříve pomocí diferenciálů, pak separujeme proměnné a poté integrujeme. Máme tedy postupně následující rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \quad (\text{separace proměnných}) \\ y \, dy &= -x \, dx \end{aligned}$$

$$\int y \, dy = -\int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = C .}}$$

Obecné řešení rovnice má tvar $x^2 + y^2 = C$.

Příklad 3.3. Nalezněte partikulární řešení rovnice $y' = \frac{2xe^{x^2}}{(1+y^2)e^y}$, $D(f) = \mathbb{R}$, $y(0) = 0$.

Řešení: $\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \cdot \frac{1}{(1+y^2)e^y}$

$$(1+y^2)e^y dy = 2xe^{x^2} dx \quad \text{pro } \frac{1}{(1+y^2)e^y} \neq 0 \quad \text{platí } \forall y \in \mathbb{R} .$$

Úprava levé strany rovnice:

$$\begin{aligned} \int (1+y^2)e^y dy &= \left[\begin{array}{ll} u = 1+y^2 & v' = e^y \\ u' = 2y & v = e^y \end{array} \right] = e^y(y^2 - 1) - \int ye^y dy = \left[\begin{array}{ll} u = y & v' = e^y \\ u' = 1 & v = e^y \end{array} \right] = \\ &= e^y(y^2 + 1) - 2ye^y + 2e^y = e^y(y^2 - 2y + 3) . \end{aligned}$$

Úprava pravé strany rovnice:

$$\int 2xe^{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right] = \int e^t dt = e^t = e^{x^2} .$$

Úpravy stran zpětně dosadíme do zadané rovnice a získáme obecné řešení rovnice:

$$e^y(y^2 - 2y + 3) = e^{x^2} + C$$

Hodnotu konstanty C zjistíme tak, když do obecného řešení rovnice dosadíme počáteční podmínky $y(0) = 0$:

$$e^0 \cdot 3 = e^0 + C$$

$$C = 2$$

Dosazením vypočítané hodnoty C do obecného řešení získáme partikulární řešení:

$$\underline{\underline{e^y(y^2 - 2y + 3) = e^{x^2} + 2 .}}$$

Partikulární řešení rovnice je $e^y(y^2 - 2y + 3) = e^{x^2} + 2$.

3.2. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Obecně nazýváme jakoukoliv rovnici lineární, jestliže v ní neznámé vystupují v první mocnině. V diferenciální rovnici je neznámou funkce $y(x)$ a ovšem též její derivace $y'(x)$. Proto má lineární diferenciální rovnice obecně tvar

$$A(x) y' + B(x)y = C(x), \quad (3.8)$$

kde $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ jsou spojité funkce proměnné x v jistém intervalu $(a; b)$ a pro $x \in (a; b)$ je $A(x) \neq 0$. Potom rovnici (3.8) vydělíme koeficientem $A(x)$ a dostaneme tzv. **kanonický tvar** lineární rovnice 1. řádu [2]

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (3.9)$$

kde $P(x) = B(x) / A(x)$ a $Q(x) = C(x) / A(x)$ jsou spojité v intervalu $(a; b)$. Funkce $Q(x)$ se nazývá pravá strana rovnice (3.9), jestliže $Q(x) \equiv 0$, potom rovnici (3.9) nazýváme lineární homogenní rovnicí. V opačném případě rovnici (3.9) nazýváme nehomogenní lineární rovnicí.

3.3. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu - homogenní

Rovnice ve tvaru

$$y' + P(x)y = 0 \quad (3.10)$$

je homogenní lineární rovnice a lze ji řešit přímo separací proměnných. Po separaci obdržíme rovnici

$$\frac{dy}{y} = -P(x) dx$$

integrací získáme

$$\ln|y| = -\int P(x) dx + C$$

obecné řešení rovnice (3.10) zní

$$y = C e^{-\int P(x) dx}, C \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

Hodnotu konstanty C zjistíme po dosazení počátečních podmínek $y(x_0) = y_0$ do rovnice (3.11):

$$y_0 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = y_0.$$

Zjištěnou konstantu zpětně dosadíme do obecného řešení (3.11) a obdržíme partikulární řešení

$$y = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x A(x) dx}. \quad (3.12)$$

Příklad 3.4. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' - y/x = 0$.

Řešení:

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|y| - \ln|x| = \ln C$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln C$$

$$\frac{y}{x} = C$$

$$\underline{\underline{y = Cx.}}$$

Obecné řešení rovnice má tvar $y = Cx$, kde C je libovolná konstanta.

Příklad 3.5. Určete obecné řešení homogenní diferenciální rovnice $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$.

Řešení: $y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \quad x \neq \pm 1$

$$\boxed{\frac{1-y^2}{1-x^2} \geq 0}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{podmínka pro separaci: } \sqrt{1-y^2} \neq 0$$

$$\arcsin y = \arccos x + C$$

$$\underline{\underline{y = \sin(\arccos x + c)}}.$$

Obecné řešení má tvar $y = \sin(\arccos x + c)$, kde C je libovolná konstanta.

$$\boxed{\frac{1-y^2}{1-x^2} \geq 0}$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1-y^2 \geq 0 & \wedge & 1-x^2 > 0 \\ y^2 \leq 1 & & x^2 < 1 \\ y \in \langle -1; 1 \rangle & \wedge & x \in \langle -1; 1 \rangle \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} 1-y^2 \leq 0 & \wedge & 1-x^2 < 0 \\ y^2 \geq 1 & & x > 1 \\ y \in (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle & \wedge & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{array} \right).$$

3.4. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu - nehomogenní

Uvedená rovnice (3.13) je tvaru nehomogenní lineární diferenciální rovnice, kde $Q(x) \neq 0$.

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{3.13}$$

kde funkce $P(x)$, $Q(x)$ jsou spojité na intervalu $(a; b)$. Uvedeme dvě metody, jak můžeme řešit rovnici (3.13); první je metoda variace konstanty (nebo také Langrangeova metoda). Tato metoda spočívá v tom, že obecné řešení rovnice (3.13) hledáme ve tvaru (3.11) v němž konstanta C vystupuje jako spojitě diferencovatelná funkce. Druhá metoda řešení je Eulerova metoda.

Nejprve si ukážeme, jak řešit pomocí metody variace konstanty, tj. hledáme obecné řešení rovnice (3.13) ve tvaru

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \quad (3.14)$$

Dosazením rovnice (3.14) do (3.3) dostaneme

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} - C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} + C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x) \quad (3.15)$$

nebo-li

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} &= Q(x) \\ C'(x) &= Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \\ C(x) &= \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} + C \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dosadíme-li (3.16) do (3.14) dostaneme obecné řešení rovnice (3.13)

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \right].$$

Věta 3.1.

Nechť P, Q jsou spojité funkce na intervalu $(a; b)$. Pak obecné řešení rovnice (3.13) je tvaru [2]

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \right], C \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, x_0 \in (a; b), c = y_0$, pak partikulární řešení rovnice je tvaru

$$y_P = e^{-\int_{x_0}^x P(x) dx} \left[\int_{x_0}^x Q(x) e^{\int_{x_0}^x P(x) dx} dx + y_0 \right].$$

Při Eulerově metodě postupujeme tak, že nejprve provedeme substituci $y = u \cdot v$. Substituci dosadíme do rovnice (3.13) a dostaneme

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P \cdot u \cdot v = Q \quad (3.17)$$

Funkci $v(x)$ volíme tak, aby platilo

$$v' + P \cdot v = 0 \quad (3.18)$$

Řešením rovnice (3.18) dostaneme

$$v' = -Pv$$

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x) dx$$

$$\ln|v| = -\int P(x) dx$$

$$v = e^{-\int P(x) dx}$$

(3.19)

Vztah (3.19) dosadíme zpětně do rovnice (3.17)

$$u' \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$$

$$u' = Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx}$$

$$u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C$$

a obecné řešení rovnice (3.13) má tvar [2]

$$y = u \cdot v = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int P(x) dx}.$$

Partikulární řešení rovnice (3.13), procházející bodem $[x_0, y_0]$, kde $a < x_0 < b$, $|y_0| < +\infty$, bude mít tvar

$$y = \exp\left(-\int_{x_0}^x P(x) dx\right) \left[y_0 + \int_{x_0}^x \exp\left(\int_{x_0}^x P(x) dx\right) Q(x) dx \right].$$

(3.20)

Věta 3.2. (princip superpozice)

Je-li y_H obecné řešení homogenní rovnice (3.10) a y_P partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.13), je obecné řešení nehomogenní rovnice (3.13) rovno

$$y = y_H + y_P.$$

(3.21)

Důkaz věty 3.2:

Jestliže je y_p řešením rovnice (3.13), platí $y_p' + P y_p = Q$. Odečteme-li tuto rovnici od (3.6), obdržíme vztah [9]

$$(y - y_p)' + P(y - y_p) = 0,$$

zjišťujeme, že rozdíl $y_H = y - y_p$ vyhovuje homogenní rovnici (3.10). Najdeme-li obecné řešení homogenní rovnice y_H , bude $y = y_H + y_p$, což je vztah (3.21).

Příklad 3.6. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{1}{t}y = -\ln t$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Řešení: Daná rovnice je nehomogenní rovnicí (3.13), v níž funkce $P(x) = \frac{1}{t}$, $Q(x) = -\ln t$. Tuto rovnici vyřešíme pomocí metody variace konstanty.

Nejprve řešíme příslušnou rovnici homogenní: $y' - \frac{1}{t}y = 0$.

$$y' = \frac{1}{t}y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$$

$$\ln|y| = \ln|t| + \ln C$$

$$\underline{\underline{y = C \cdot t.}}$$

(3.22)

Obecný integrál rovnice hledáme podle (3.14) ve tvaru $y = C(t) \cdot t$

tedy

$$y'(t) = C'(t) \cdot t + C(t)$$

(3.23)

Dané hodnoty (3.22) a (3.23) dosadíme do zadání $y' - \frac{1}{t}y = -\ln t$ a získáme

$$C'(t) \cdot t + C(t) - \frac{1}{t} \cdot C(t) \cdot t = -\ln t$$

$$C'(t) \cdot t = -\ln t$$

$$C'(t) = \frac{-\ln t}{t}$$

$$C(t) = -\int \frac{\ln t}{t} dt + C$$

Pravou stranu rovnice integrujeme:

$$-\int \frac{\ln t}{t} dt = \left[\begin{array}{l} \ln t = y \\ \frac{1}{t} dt = dy \end{array} \right] = -\int y dy = -\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} \ln^2 t.$$

Obecným řešením je jednoparametrická soustava funkcí $C(t) = -\frac{1}{2} \ln^2 t + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Odtud a ze vztahu (3.22) dostaneme, že obecným řešením rovnice je množina funkcí

$$y = \left(-\frac{1}{2} \ln^2 t + C \right) \cdot t = Ct - \frac{t}{2} \ln^2 t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.7. Vyřešte diferenciální rovnici $y' + \operatorname{tg} x y = \frac{1}{\cos x}$ Eulerovou metodou.

Řešení: Nejprve provedeme substituci $y = u \cdot v$, derivujeme-li tuto substituci obdržíme

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

dosazením do zadané rovnice postupně dostaneme

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \operatorname{tg} x uv = \frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v' = -\operatorname{tg} x v \\ v = \cos x \end{array}}$$

$$u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u = \operatorname{tg} x + C$$

$$y = u \cdot v = (\operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + C \cos x = \sin x + C \cos x.$$

Partikulární řešení procházející bodem $[0,1]$ dostaneme ze vztahu (3.20)

$$y = \exp\left(-\int_0^x \operatorname{tg} x dx\right) \left[1 + \int_0^x \exp\left(\int_0^x \operatorname{tg} x dx\right) \frac{1}{\cos x} dx \right] = \cos x [1 + \operatorname{tg} x] = \cos x + \sin x.$$

4. Obsah a úkoly reologie

Většina textilních materiálů má v oblasti provozních zatížení za normální pokojové teploty složitější chování než kovové materiály. Okamžitý stav deformace závisí nejenom na zatížení, ale i na čase. Stejně tak i okamžitý stav vnitřních sil závisí na celém časovém průběhu předchozích deformací. Například při zkoušce tečení materiálu (z anglického slova creep-plížití se), kdy vlákno se s časem prodlužuje při konstantním napětí, obdržíme časový průběh deformace $\varepsilon(t)$.

Budeme se zabývat vztahem mezi napětím a deformací a rychlostí deformace v látkách. Tento vztah je materiálovou charakteristikou dané látky, kterou musíme respektovat. Podrobné zkoumání jednotlivých vztahů provádí vědní obor reologie. Její teoretické základy položili profesori Reiner a E.C.Bingham v roce 1926 [13].

Reologické poznatky se uplatňují v oborech, kde se dává hmotám působením napětí žádaný tvar, např. při zpracování a tváření kovů v hutnictví, vytváření z plastického keramického těsta, lití do forem a vytváření z roztavených sklovin atd.

Reologie pevné fáze, především její odvětví vazkopružnost a vazkoplasticita, zkoumají přetváření a napětí v hmotách nejen v jejich ustáleném stavu, ale především jeho časové proměny a také rychlost, s jakou tyto změny probíhají. Obecně řeší vztahy mezi napětím, přetvořením, jejich derivacemi podle času, a vztahy mezi jejich časovými integrály a časem.

Reologie kapalin řeší především napjatost kapalin s vyšší vazkostí a otázky pohybu. V teorii strojních a stavebních konstrukcí má reologie zvláštní význam pro dlouhodobé přetváření kovů a betonu za vysokých teplot, dlouhodobého přetváření plastických hmot i jiných konstrukčních hmot jako je keramika, dřevo apod.

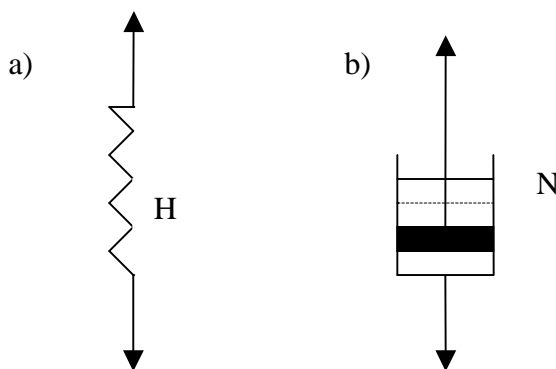
V širším slova smyslu rozeznáváme podle oboru výzkumu reologii, která řeší všechny otázky související s přetvářením hmot a pohybem kapalin a do níž patří teorie vláčnosti, plasticity, pružnosti, i hydrodynamika, a reologii v užším slova smyslu, do které patří z hydrodynamiky jen pohyb, při kterém se uplatňuje vazkost kapalin a z mechaniky pevné fáze jen jevy závislé na čase.

Reologie se podle předmětu výzkumu dělí na *makroreologii*, která řeší přetváření hmoty nebo pohyb vazké kapaliny jako celku, a na *mikroreologii*, která odvozuje reologické jevy ze struktury látek a z vlastností jejich částic a složek [13].

4.1. Základní reologické látky

Pro vystižení reologického chování látek a pro jejich klasifikaci, se zavádějí reologické modely. Umožňují nahradit chování materiálu mechanickým modelem, který je složen z mechanických prvků. Látka, jejíž reologické chování lze popsat přímou úměrností mezi napětím a deformací, se modeluje pružinou s tuhostí vystiženou modulem pružnosti E a v reologické klasifikaci látek se označuje jako **hookovská látka (H)** [5].

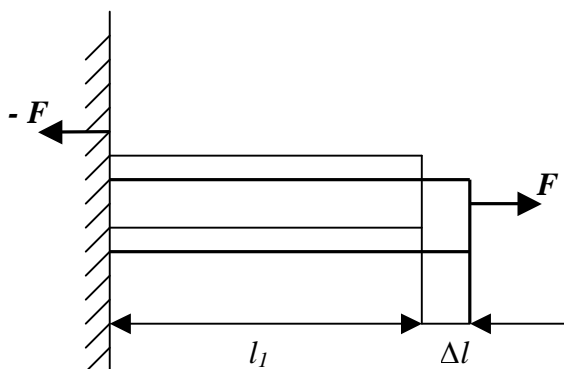
Hookova hmota je představována reologickým modelem dokonale pružného péra (obr. 4-1a), jehož chování se vyšetřuje v klasické teorii pružnosti Hookovým zákonem. Přetváření je znázorněno šikmou přímkou na obr. 4-2, která vyjadřuje Hookův zákon.



Obr. 4-1. Reologické modely pružné hmoty a vazké kapaliny

Hookův zákon

Při deformaci tahem se uvažované těleso (např. tyč, drát) prodlouží z původní délky l_1 na délku l (obr. 4-2). Veličinu $\Delta l = l - l_1$ nazýváme **prodloužení**.



Obr. 4-2. Prodloužení tyče deformací tahem

Prodloužení Δl je závislé na počáteční délce l_1 tělesa. Proto je vhodnější zavést veličinu relativní (poměrné) prodloužení, které je definováno vztahem [14]

$$\varepsilon = \frac{l - l_1}{l_1} = \frac{\Delta l}{l_1} \quad (4.1)$$

Zvětšujeme-li postupně velikost sil, které deformují zkoumané těleso tahem, můžeme experimentálně sledovat závislost normálového napětí na relativním prodloužení.

Z experimentů vyplývá, že při pružné deformaci tahem je normálové napětí přímo úměrné relativnímu prodloužení. Tento poznatek nazýváme **Hookův zákon** (pozn. přímou úměrnost mezi normálovým napětím a relativním prodloužením pro pružnou deformaci tahem objevil v roce 1676 anglický fyzik R. Hooke (1635-1702). Matematicky Hookův zákon zapisujeme ve tvaru

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.2)$$

kde konstanta E je **modul pružnosti v tahu**. Hodnoty materiálové konstanty E jsou uvedeny v MFChT, hlavní jednotkou je Pa .

Jev, který Hooke vyslovil na základě empirického tj. ze zkušenosti odvozeného zákona říká, že velikost deformace je úměrná působící síle. Deformace je změna tvaru nebo objemu tělesa způsobená účinkem vnějších sil. K deformaci pružiny v důsledku působení napětí σ dochází okamžitě. Veškerá energie, vynaložená na elastickou deformaci pružiny se v pružině akumuluje. Po odlehčení se tato akumulovaná energie beze zbytku spotřebuje na návrat pružiny do původního, nedeformovaného stavu.

Další člen reologického modelu tvoří **newtonovská viskózní tekutina** neboli **newtonovská látka (N)**, která se modeluje pístem, jehož zpožďující účinek je charakterizován viskozitou η . Píst s otvory se pohybuje ve válci s kapalinou, která protéká otvory a klade pohybu odpor vzrůstající přímočaře s rychlostí podle zákona vazkého pohybu, nazývaný Newtonův zákon [3]

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (4.3)$$

kde η je viskozita materiálu, nezávislá na rychlosti deformace $\frac{d\varepsilon}{dt}$ a velikosti napětí σ .

Účinkem vnějšího napětí se píst ve viskózní kapalině pohybuje po celou dobu, po kterou toto napětí působí. Dodaná energie se spotřebovává na překonání vnitřního

tření (viskozity) kapaliny. Deformační děj je z hlediska energetického zcela ztrátový. Po odlehčení se poloha pístu nemění-těleso nemá energii pro návrat do původního stavu. Hodnotu viskózní konstanty η nalezneme v MFChT, základní jednotkou je 10 poise.

Kombinací vlastností viskózní kapaliny a hookovské pevné látky získáme ***viskoelastickou látku***, která tedy je na pomezí mezi kapalinami a pevnými látkami. Viskoelastická látka patří k typickému objektu reologie, neboť reologie neuznává ostrou hranici mezi kapalinou a pevnou látkou. Viskoelastická látka s krátkými relaxačními dobami vykazuje většina látek [5].

Chování viskoelastických materiálů se vyšetřuje na základě reologických modelů, které jsou složeny z různě řazených elementů. Budeme zkoumat pouze základní reologické modely, kde jsou pouze dva typy reologických látek, pružný a vazký prvek, tyto prvky jsou spojeny buď paralelně, anebo sériově.

5. Reologické modely

Jak již bylo zmíněno, reologické modely používáme pro zjišťování vztahu mezi zatížením a deformací, neboť nejlépe vystihují reologické chování materiálu. Modely se vytvářejí z reologických elementů dvojím způsobem, buď sériovým nebo paralelním spojením těchto elementů. Pro popis viskoelastického chování jsou základními prvky reologických modelů hookovská pružina a newtonský viskózní element. K základním a k nejjednodušším reologickým modelům viskoelastické látky patří Kelvinův-Voigtův a Maxwellův model. S jmenovanými modely se blíže seznámíme, popíšeme je pomocí diferenciální rovnice.

Reologické vlastnosti materiálu popisují parametry tzv. konstitutivní rovnice, která udává vztah mezi napětím, deformací s časem. Nejobecnější rovnicí, popisující vztah časově závislého napětí σ a deformace ε je lineární diferenciální rovnice

$$a_0\sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} + a_2 \frac{d\sigma^2}{dt} + \dots = b_0\varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + b_2 \frac{d\varepsilon^2}{dt} \dots, \quad (5.1)$$

kde $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ jsou materiálové konstanty, charakteristické pro danou látku a t je čas. Protože materiálové konstanty nezávisí na čase, je tato rovnice lineární s konstantními koeficienty. Závisle proměnnou může být jak napětí σ , tak deformace ε . Pro jednoznačné určení deformace z rovnice (5.1) při průběhu napětí je ještě nutno uvést počáteční podmínky, tj. deformace a její derivace v čase $t = 0$. Stejně tomu je i při výpočtu napětí σ .

U reologických modelů budeme zkoumat viskoelastické vlastnosti materiálů. Většina textilních materiálů má v oblasti provozních zatížení za normální pokojové teploty složitější chování než kovové materiály. Okamžitý stav deformace závisí nejen na zatížení materiálů, ale i na čase. Podobně okamžitý stav vnitřních sil závisí na celém časovém průběhu předchozích deformací. Například při zkoušce relaxačních vlastností textilního vlákna obdržíme pro daný průběh deformace $\varepsilon(t)$. Relaxace napětí představuje úbytek napětí (síly) s časem při konstantní deformaci. Narůstání napětí s časem při stálé deformaci označujeme jako *zotavení napětí* [6].

Jinou vlastností viskoelastických materiálů je tečení materiálu (z anglického creep = plížití se), kdy vlákno se s časem prodlužuje při konstantním zatížení. Odlehčíme-li náhle například vlákna z polymerů, nabývají původních rozměrů velmi pomalu (se zpožděním), tato vlastnost je označována jako *dopružování* [8].

Nejjednodušší reologické modely Kelvinovy hmoty a Maxwellovy kapaliny se označují jako lineárně viskoelastické modely, neboť u nich platí lineární závislost mezi zatížením a deformací. Sestavíme i modifikované Kelvinovy a Maxwellovy modely, kde nebude platit lineární závislost, ale kvadratická závislost mezi napětím a deformací materiálu.

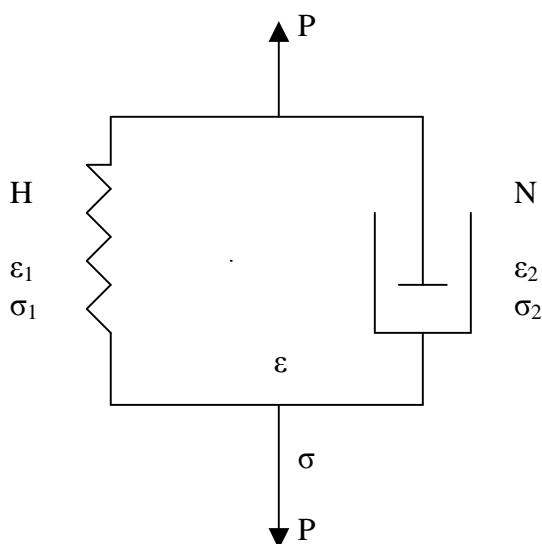
5.1. Kelvinův model

Kelvinův model nebo též Voigtův model se skládá z paralelně spojené pružiny H a viskózního (vazkého) elementu N, a je znázorněn na obr. 5-1. U Kelvinova-Voigtova je deformace na obou elementech stejná [6]

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (5.2)$$

a celkové napětí se rovná součtu napětí na jednotlivých elementech [6]

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (5.3)$$



Obr. 5-1. Reologický model Kelvinovy vazkopružné hmoty

Z rovnic (4.2) a (4.3) vyplývá pro prvky modelu vztahy: $\sigma_1 = E\varepsilon_1$, $\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$.

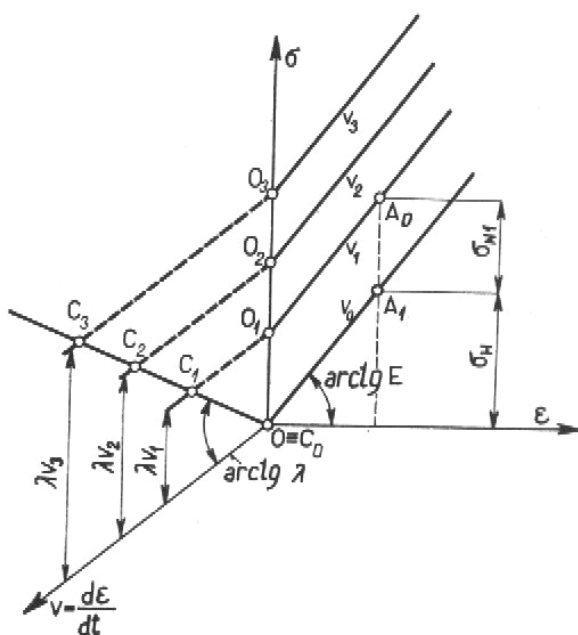
(5.4)

Dosadíme-li vztahy (5.4) do rovnice (5.3) a při uvážení podmínky (5.2) zjistíme, že pro Kelvinův model viskoelastické látky platí tato diferenciální rovnice [13]

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (5.5)$$

kde σ je napětí, ε je deformace a η je součinitel normální vazkosti. Obyčejnou diferenciální rovnici (5.5) použijeme pro výpočet časového průběhu napětí a deformace, jestliže druhá veličina (deformace a napětí) bude konstantní.

Z trojosého diagramu závislosti mezi napětím, přetvořením a rychlosti přetváření (obr. 5-2) a dále ze vzorce (5.5) vyplývá, že se výsledné napětí Kelvinovy hmoty skládá z části pružné $\sigma_1 = \sigma_H$, která nezávisí na rychlosti přetváření a z části vazké $\sigma_2 = \sigma_N$, která je přímo úměrná této rychlosti. Čistě pružný stav nastává při nulové rychlosti přetváření $v_0 = 0$. Při jiných rychlostech $v = d\varepsilon / dt$ je počátek pružného přetváření posunut o pořadnici $\sigma_N = \eta v$, která odpovídá vazké části napětí [13].



Obr. 5-2. Přetvárný diagram Kelvinovy pružnovazké hmoty

Autor publikace [13] neuvádí detailní postupy při řešení diferenciálních rovnic, ale pro snazší pochopení, jak se dospělo k daným výsledkům, budeme uvádět celé postupy řešení.

Naše zkoumání viskoelastických vlastností textilních materiálů zaměříme na chování v režimech mechanického namáhání.

1) REŽIM RELAXACE

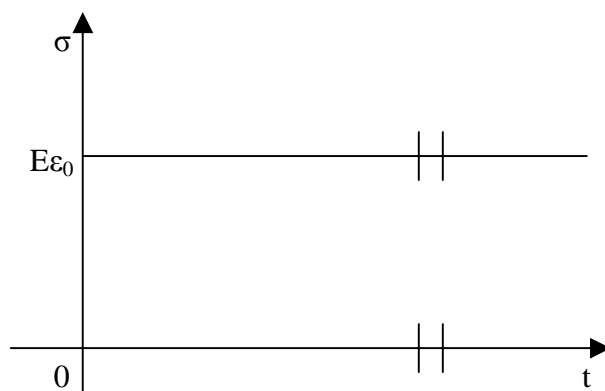
Reologický model v daném režimu má konstantní deformaci a počáteční napětí σ_0 v čase $t_0 = 0$ pokládáme za nulové. Vyjádříme si diferenciální rovnici, která bude charakterizovat chování modelu. Pro vyjádření rovnice v režimu relaxace vycházíme z úvodního vyjádření diferenciální rovnice (5.5)

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt},$$

dosadíme-li uvedené podmínky do rovnice (5.5) je druhý člen na pravé straně rovnice nulový, získáme jednodušší vztah

$$\sigma = E\varepsilon_0, \quad (5.6)$$

naším úkolem bylo zjistit chování modelu relaxace v závislosti napětí σ na čase t . A jak je patrné z rovnice (5.6), v režimu relaxace nezávisí napětí na čase. Lze proto říci, že Kelvinův model se k vystižení relaxace napětí nehodí, neboť napětí, které v něm deformací vznikne, se s časem dále nemění (obr. 5-3).



Obr. 5-3. Průběh Kelvinova modelu v režimu relaxace

2) KONSTANTNÍ NAPĚTÍ

Jak bude vypadat znázornění průběhu dopružování Kelvinovy pružnovazké hmoty? Zaujímá nás změna přetvoření s časem při stálém napětí σ_0 . Průběh dopružování vyplývá z rovnice (5.5) kam dosadíme napětí σ_0 , které je stálé v čase t a počáteční přetvoření ε_0 v čase $t_0 = 0$ budeme pokládat za nulové. Získáme vztah

$$\sigma_0 = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt},$$

kde napětí σ_0 je konstanta, daný tvar můžeme ještě upravovat

$$\sigma_0 - E\varepsilon = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int \frac{1}{\eta} dt = \int \frac{d\varepsilon}{\sigma_0 - E\varepsilon}$$

obě strany rovnice integrujeme podle dané proměnné

$$\frac{1}{\eta} t + c = -\frac{1}{E} \ln|\sigma_0 - E\varepsilon| \quad (5.7)$$

a dosazením počátečních podmínek do rovnice (5.7) zjistíme hodnotu konstanty c ,

$$c = -\frac{1}{E} \ln|\sigma_0 - E\varepsilon_0|. \quad (5.8)$$

Vyjádřenou konstantu c (5.8) dosadíme do (5.7) a obdržíme

$$\frac{1}{\eta} t - \frac{1}{E} \ln|\sigma_0 - E\varepsilon_0| = -\frac{1}{E} \ln|\sigma_0 - E\varepsilon|$$

přičtením logaritmu z levé strany získáme

$$\frac{1}{\eta} t = \frac{1}{E} \ln|\sigma_0 - E\varepsilon_0| - \frac{1}{E} \ln|\sigma_0 - E\varepsilon|$$

$$\frac{E}{\eta} t = \ln|\sigma_0 - E\varepsilon_0| - \ln|\sigma_0 - E\varepsilon|$$

rozdíl logaritmů je roven podílu daných logaritmů tedy

$$\frac{E}{\eta} t = \ln \left| \frac{\sigma_0 - E\varepsilon_0}{\sigma_0 - E\varepsilon} \right|$$

k logaritmické funkci je inverzní exponenciální funkce

$$\exp \frac{E}{\eta} t = \frac{\sigma_0 - E\varepsilon_0}{\sigma_0 - E\varepsilon}$$

daný vztah dále upravíme na tvar

$$\sigma_0 - E\varepsilon = (\sigma_0 - E\varepsilon_0) \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \quad / - \sigma_0$$

$$-E\varepsilon = (\sigma_0 - E\varepsilon_0) \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) - \sigma_0.$$

Potřebujeme vyjádřit závislost přetvoření na časové změně, proto vztah ještě upravíme

$$\varepsilon = -\frac{1}{E}(\sigma_0 - E\varepsilon_0) \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) + \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\varepsilon = -\frac{\sigma_0}{E} \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) + \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) + \frac{\sigma_0}{E}$$

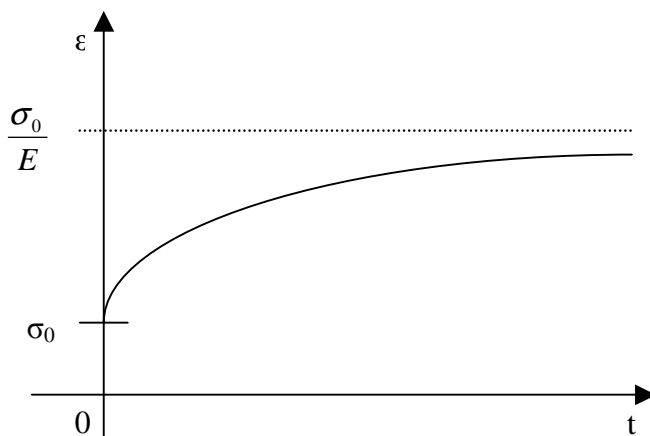
$$\varepsilon = -\frac{\sigma_0}{E} \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) + \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) + \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \right] + \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \quad .$$

(5.9)

Viskoelastická látka podrobená konstantnímu napětí zvětšuje svou deformaci s časem; tento děj je označován jako tečení. Látka po určité době zaujme rovnovážnou deformaci, jež je charakteristické pro Kelvinův model [10]. Limitní hodnota přetvoření výrazu (5.9) za nekonečně dlouhou dobu je

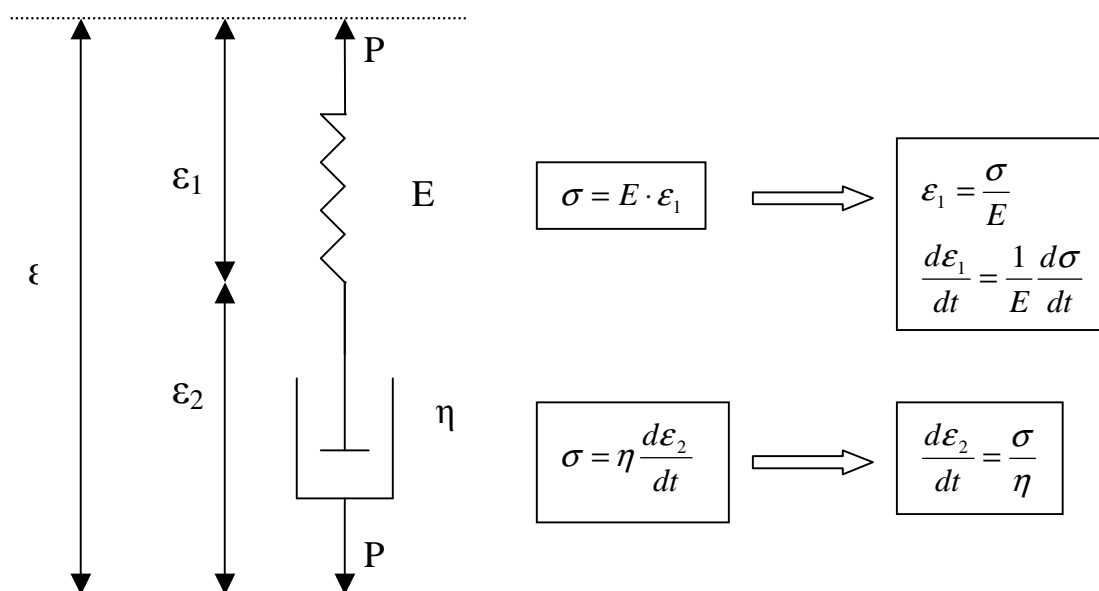
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}.$$



Obr. 5-4. Průběh dopružování Kelvinovy hmoty

5.2. Maxwellův model

Maxwellův model vzniká sériovým spojením pružiny H a viskózního elementu N, znázorněn na obr. 5-5. Daný model je označován také jako Maxwellova vazkopružná kapalina.



Obr. 5-5. Reologický model Maxwellovy kapaliny

Pro prvky Maxwellova modelu platí vztahy, které jsou uvedeny na obr. 5-5, které vyplývají z rovnic (4.2) a (4.3). Materiálové konstanty E , η mají zřejmý fyzikální význam. U Maxwellova modelu se deformace dělí na dvě složky, a to čistě elastickou a čistě viskózní složku.

Elementy modelu jsou spojeny sériově, působí na ně tudíž stejné napětí [6]

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2. \quad (5.10)$$

Deformace a jejich rychlost se sčítají [6]

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Vypočteme-li z rovnic $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ a $\sigma = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$ časovou derivaci obou deformací a dosadíme ji do vztahu (5.11), obdržíme při uvážení podmínky (5.10) diferenciální rovnici pro celkovou deformaci ε a napětí σ [13]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (5.12)$$

Je-li znám časový průběh napětí, určíme z této rovnice pouze rychlost deformace. Naopak, je-li známa rychlost deformace, lze určit průběh napětí. Rovnice (5.12) je zvláštním případem rovnice (5.1) pro Maxwellův model [13].

1) RELAXACE

Je-li přetvoření ε , které je stálé v čase, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{konstanta}$, pak počáteční napětí σ_0 v čase $t_0 = 0$ budeme pokládat za nulové. Vyjdeme z diferenciální rovnice (5.12) a po dosazení daných podmínek platí, že

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

člen na levé straně rovnice se rovná nule tedy

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} \int dt$$

obě strany rovnice můžeme integrovat podle dané proměnné

$$\ln|\sigma| = -\frac{E}{\eta} t + c \quad (5.13)$$

dosazením počátečních podmínek zjistíme hodnotu konstanty c ,

$$c = \ln|\sigma_0|. \quad (5.14)$$

Vztah (5.14) zpětně dosadíme do rovnice (5.13) a obdržíme

$$\ln|\sigma| = -\frac{E}{\eta} t + \ln|\sigma_0|, \quad (5.15)$$

rovnici (5.15) upravíme tak, abychom logaritmy měly na jedné, a to na levé straně rovnice

$$\ln|\sigma| - \ln|\sigma_0| = -\frac{E}{\eta}t$$

víme, že rozdíl logaritmů je roven podílu daných logaritmů,

$$\ln\left|\frac{\sigma}{\sigma_0}\right| = -\frac{E}{\eta}t$$

vztah upravíme pomocí inverzní funkce

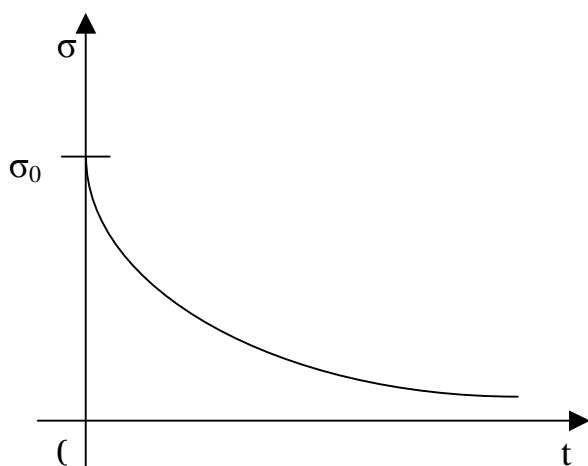
$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)$$

po úpravě získáme výsledný vztah při konstantní deformaci [13]

$$\underline{\underline{\sigma = \sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)}}. \quad (5.16)$$

Deformujeme-li viskoelastickou látku, napětí, které v ní deformace vyvolává, se s časem zmenšuje; děj je v odborných publikacích uváděn pod pojmem relaxace napětí. Ve viskoelastické látce, jejíž chování přesně modeluje Maxwellův model, napětí klesá k nule exponenciálně [5].

A pro napětí za nekonečně dlouhou dobu vyplývá z výrazu (5.16) hodnota $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = 0$.



Obr. 5-6. Ochabování reologického modelu Maxwellovy kapaliny

2) KONSTATNÍ NAPĚTÍ

Průběh chování modelu vyplývá z rovnice (5.13) dosadíme-li za napětí σ člen σ_0 , napětí σ_0 se s časem t nemění. Počáteční přetvoření ε_0 v čase $t_0 = 0$ je nulové. Vyplývá tedy vztah

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_0}{dt} + \frac{\sigma_0}{\eta},$$

první člen na pravé straně diferenciální rovnice se rovná nule platí tedy, že

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int d\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} \int dt$$

(5.17)

danou rovnici umíme integrovat a dostaneme významný vztah

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + c$$

(5.18)

dopočítáme hodnotu konstanty c z rovnice (5.18) dosadíme-li již uvedené počáteční podmínky $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0$ při konstantním napětí

$$c = \varepsilon_0$$

(5.19)

vztah konstanty c (5.19) dosadíme do rovnice (5.18) a vyjádříme výslednou rovnici závislosti napětí na čase

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \varepsilon_0.$$

(5.20)

V porovnání výsledné rovnice (5.20) s rovnicí, která je uvedena v publikaci [13]

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E},$$

(5.21)

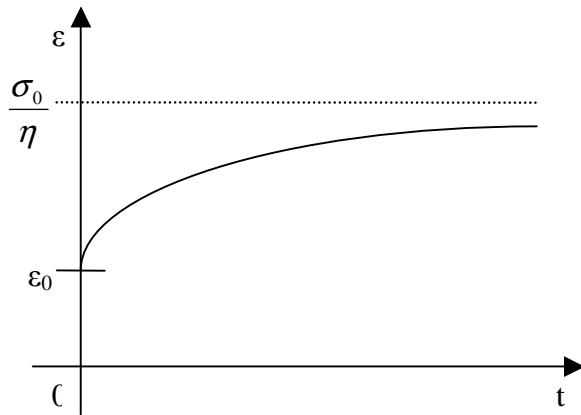
vidíme rozdíl na první pohled. Autor publikace vyjádřil počátečního přetvoření vztahem

$\frac{\sigma_0}{E}$, jež charakterizuje počáteční přetvoření procházející pružným prvkem.

Po odlehčení přetvoření pružné vymizí a druhý člen rovnice (5.21) představuje přetvoření vazké $\frac{\sigma_0}{\eta}t$, vazké přetvoření vzrůstá s časem a po odlehčení zůstává.

Limitní hodnota za nekonečně dlouhou dobu vyplývá z výrazu (5.20)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta}.$$



Obr. 5-7. Reologický model Maxwellovy vazkopružné kapaliny při plouživosti

Viskoelastická látka v režimu s konstantním napětí zvětšuje svou deformaci s časem; v odborných publikacích uváděna pod pojmem tečení. Chování neomezeného tečení nejjednodušeji modeluje Maxwellův model [5].

Zbývá nám ještě vyjádřit průběh modelu Maxwellovy kapaliny v režimu prosté deformace tj. při stálé rychlosti přetváření.

3) PROSTÁ DEFORMACE

Při stálé rychlosti přetváření $v = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon}{t}$ pro $t_0 = 0$ z rovnice (5.13) vyplývá vztah

$$v = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (5.22)$$

Z diferenciální rovnici (5.22) si vyjádříme závislost napětí na změně času

$$v = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad / \cdot E$$

$$Ev = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta} \sigma \quad (5.23)$$

Vyřešíme obyčejnou diferenciální rovnici (5.23) :

Homogenní část diferenciální rovnice:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta} \sigma = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta} \sigma \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} \int dt$$

$$\ln|\sigma| = -\frac{E}{\eta} t + c$$

$$\underline{\underline{\sigma_H = c \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t}}}$$

(5.24)

Partikulární část:

$$\sigma_P = c(t) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t}$$

(5.25)

$$\sigma' = c'(t) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} + c(t) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} \cdot \left(-\frac{E}{\eta}\right)$$

Vyjádření vztahů σ a σ' dosadíme do rovnice (5.23) a získáme

$$c'(t) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} + c(t) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} \cdot \left(-\frac{E}{\eta}\right) + \frac{E}{\eta} c(t) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} = E \cdot v$$

$$c'(t) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} = E \cdot v$$

$$c'(t) = E \cdot v \cdot e^{\frac{E}{\eta} t}$$

$$c(t) = E \cdot v \cdot \int e^{\frac{E}{\eta} t} + K$$

$$c(t) = E \cdot v \cdot e^{\frac{E}{\eta} t} \cdot \frac{\eta}{E} + K$$

$$c(t) = \eta \cdot v \cdot e^{\frac{E}{\eta} t} + K$$

(5.26)

Výraz (5.26) dosadíme do vztahu (5.25) a platí tedy

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \left(\eta \cdot v \cdot e^{\frac{E_t}{\eta}} + K \right) \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}} \\
\sigma_p &= \eta \cdot v \cdot e^{\frac{E_t}{\eta}} \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}} + K \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}} \\
\sigma_p &= \eta \cdot v + K \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}}
\end{aligned}
\tag{5.27}$$

Dosazením podmínek $\sigma(t=0) = \sigma_0$ do výrazu (5.27) vyjádříme hodnotu konstanty K .

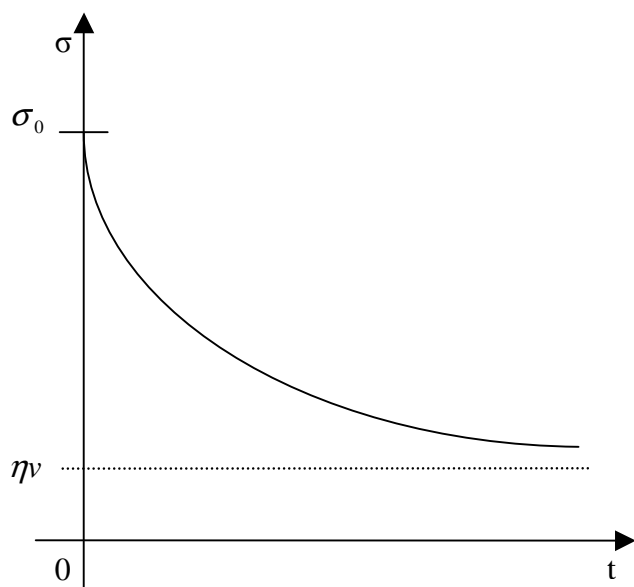
Platí tedy, že

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \eta \cdot v + K \cdot e^0 \\
\sigma_0 &= \eta \cdot v + K \\
&\Downarrow \\
K &= \sigma_0 - \eta \cdot v
\end{aligned}
\tag{5.28}$$

Hodnotu konstanty K (5.28) dosadíme zpětně do vztahu (5.27) a získáme výsledné vyjádření při stálé rychlosti přetváření [13]

$$\begin{aligned}
\sigma &= \eta \cdot v + (\sigma_0 - \eta \cdot v) \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}} = \eta \cdot v + \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}} - \eta \cdot v \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}} \\
\sigma &= \eta \cdot v \cdot \left(1 - e^{-\frac{E_t}{\eta}} \right) + \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_t}{\eta}} .
\end{aligned}
\tag{5.29}$$

Vztah, který vyjadřuje *ochabování* (relaxaci), tj. pokles napětí s časem při stálé rychlosti přetváření. Křivky, při stálé rychlosti přetváření za nekonečně dlouhou dobu, se blíží k přímkám vzdáleným od osy t o vztah ηv (obr. 5-8).



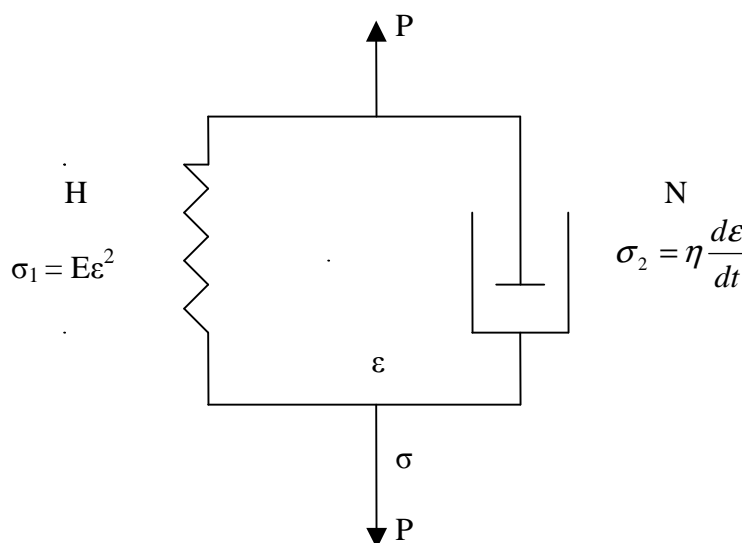
Obr. 5-8. Maxwellův model v režimu prosté deformace

6. Kvadratická závislost pružného prvku

Jednoduché modely viskoelastického materiálu Kelvinovy hmoty a Maxwellovy kapaliny platila lineární závislost mezi zatížením a deformací. Jak by vypadal reologický model, který nemá lineární, ale kvadratickou závislost mezi zatížením a deformací. Pojďme prozkoumat chování těchto modelů. Vyjdeme ze znalostí Kelvinova a Maxwellova modelu, kde však nastane jeden zásadní rozdíl, napětí přenášené pružným prvkem H je úměrné druhé mocnině přetvoření.

6.1. Modifikovaný Kelvinův model

Výsledné napětí u modifikovaného Kelvinova reologického modelu (zapojení pružného a vazkého prvku souběžně vedle sebe) můžeme vyjádřit výsledné napětí součtem napětí $\sigma_H = E\varepsilon^2$, přenášeného prvkem pružným H a napětí $\sigma_N = \eta(d\varepsilon/dt)$, kde η je součinitel normální vazkosti, přenášeného vazkým prvkem N (obr. 6-1).



Obr. 6-1. Modifikovaný model Kelvinovy hmoty

Výsledné napětí u modifikovaného Kelvinova modelu lze snadno vyjádřit jako součet

jednotlivých napětí:

$$\sigma = E\varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (6.1)$$

Integrujeme obyčejnou lineární diferenciální rovnici (6.1). Celý průběh integrace si uvedeme v následujících řádcích. Celou rovnici (6.1) vydělíme součinitelem vazkosti η ,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon^2 = \frac{\sigma}{\eta} \quad (6.2)$$

Danou rovnici (6.2) budeme integrovat pomocí vzorce z publikace [1], který nám usnadní výpočty. Publikace uvádí vzorec: $y' + ay^2 = b$

Jedná se o vyjádření integrální křivky, která prochází bodem $[x_0, y_0]$

$$y = \frac{y_0 \sqrt{ab} + b \operatorname{tgh} \sqrt{ab} \cdot (x - x_0)}{\sqrt{ab} + a y_0 \operatorname{tgh} \sqrt{ab} \cdot (x - x_0)}$$

$$\varepsilon' + \frac{E}{\eta} \varepsilon^2 = \frac{\sigma}{\eta}$$

$$a = \frac{E}{\eta}$$

$$b = \frac{\sigma}{\eta}$$

Integrální křivka procházející bodem $[t, \varepsilon_0]$: $\varepsilon = \frac{\frac{\varepsilon_0}{\eta} \sqrt{E\sigma} + \frac{\sigma}{\eta} \operatorname{tgh} \frac{1}{\eta} \sqrt{E\sigma} (t - t_0)}{\frac{1}{\eta} \sqrt{E\sigma} + \frac{E}{\eta} \varepsilon_0 \operatorname{tgh} \frac{1}{\eta} \sqrt{E\sigma} (t - t_0)}$ (6.3)

Budeme pozorovat, jak se reologické modely s kvadratickou závislostí u pružného prvku mění v jednotlivých režimech konstantní deformace a konstantního napětí.

1) RELAXACE

U modelu relaxace nás zajímá závislost napětí na čase tj. $\sigma(t)$ při konstantní deformaci. Relaxace reologického modelu s kvadratickým členem pružného prvku je model, kde dochází ke konstantní deformaci materiálu. Jak si představit model relaxace? Jako příklad si uvedeme zatížení polštáře pomocí kostky, nastává konstantní tloušťka materiálu a pozorujeme, jak se mění napětí v čase, vypočítáme jak napětí s časem klesá a síla se stále zmenšuje.

Konstantní deformace: $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{konst}$

Počáteční podmínky: $\sigma(t = 0) = \sigma_0$

Připomeňme si, že při vyjadřování průběhu chování modelu v jednotlivých režimech vždy vycházíme z úvodní diferenciální rovnice, do které dosazujeme podmínky. V daném případě vyjdeme z rovnice (6.2) a platí

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon_0^2 = \frac{\sigma}{\eta}.$$

První člen na levé straně diferenciální rovnice se rovná nule a získáme nový vztah

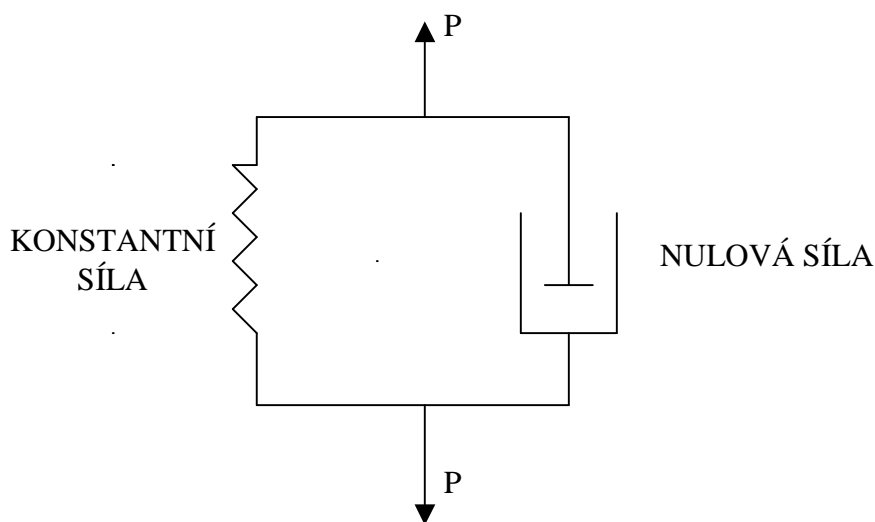
$$\frac{E}{\eta} \varepsilon_0^2 = \frac{\sigma}{\eta}.$$

Danou rovnici ještě upravíme tak, abychom vyjádřili závislost napětí σ na čase t při konstantní deformaci ε_0

$$\underline{\underline{\sigma = E\varepsilon_0^2.}}$$

(6.4)

Průběh chování modifikovaného modelu Kelvinovy hmoty znázorňuje obr. 6-2.

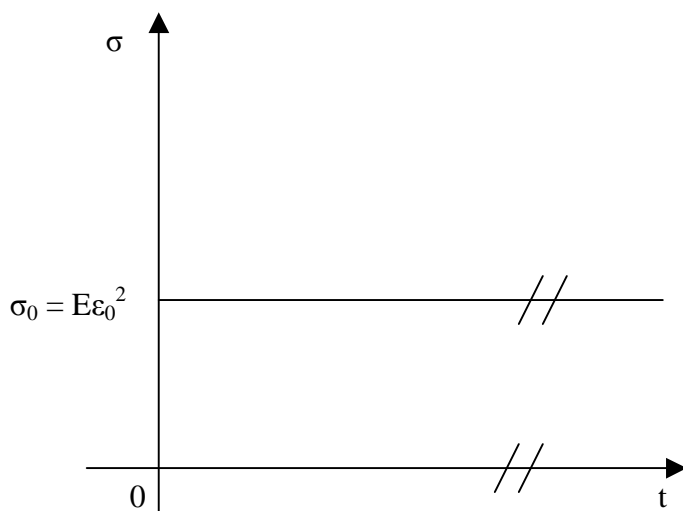


Obr. 6-2. Režim relaxace modifikovaného modelu

Komentář k obr. 6-2:

Napětí přenášené vazkým prvkem vymizí, a napětí je přenášeno pouze větví, kde je umístěn pružný prvek H. Jak velkou sílu musíme nyní vynaložit? To záleží pouze a jen na situaci, jak velice byla pružina natažená. Rychlost deformace je nulová, pružina zajišťuje konstantní deformaci, napětí závisí pouze na napětí přenášeném první větví.

Při konstantním přetvoření vyplývá z výrazu (6.4) pro deformaci za nekonečně dlouhou dobu výraz $E\varepsilon_0^2$ (obr. 6-3).



Obr. 6-3. Průběh dopružování v modelu relaxace s kvadratickým členem pružného prvku

Komentář k obr. 6-3:

Z grafického zobrazení modelu relaxace Kelvinova pružnovazkého prvku vidíme, že napětí není časově závislé. Jeho hodnota je rovna napětí potřebnému k realizaci dané počáteční deformace.

2) STÁLÉ NAPĚTÍ

Reologický model Kelvinovy pružnovazké hmoty (úměrná druhé mocnině přetvoření u pružného prvku) představuje závislost deformace na čase tj. $\varepsilon(t)$ při konstantním napětí. Pro názornou představu si uvedeme příklad: zatížíme-li vlákno na obou jeho koncích do pevných čelistí, můžeme s odstupem času pozorovat, jak se délka vlákna prodlužuje, aniž bychom měnili napětí.

Konstantní napětí: $\sigma = \sigma_0 = \text{konst}$

Počáteční podmínky: $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0$

Připomeňme si tvar diferenciální rovnici (6.1), ze které vycházíme

$$\sigma = E\varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (6.1)$$

Integrací rovnice (6.1) s ohledem na dané podmínky získáme další významný vztah:

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 - E\varepsilon^2 &= \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \\
 \frac{\sigma_0 - E\varepsilon^2}{\eta} &= \frac{d\varepsilon}{dt} \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\sigma_0 - E\varepsilon^2}{\eta} \quad (\text{separace proměnných}) \\
 \int \frac{d\varepsilon}{\frac{\sigma_0 - E\varepsilon^2}{\eta}} &= \int dt \\
 \frac{\eta}{E} \int \frac{d\varepsilon}{\frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon^2} &= \int dt
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Pro usnadnění počítání integrace levé strany rovnice (6.5) využijeme vzorce [1]:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|} \\
 a = \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \\
 x = \varepsilon \\
 \frac{\eta}{E} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon} \right| = t + c
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Abychom mohli pokračovat ve vyjadřování vztahu závislosti přetvoření ε na čase t , vypočteme nejprve hodnotu konstanty c z rovnice (6.6) tak, že dosadíme počáteční podmínky $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$:

$$c = \frac{\eta}{E} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \right| \tag{6.7}$$

Získanou hodnotu (6.7) konstanty c zpětně dosadíme do rovnice (6.6) a vyjádříme výslednou závislost deformace ε na čase t . Uvedeme postupné kroky při řešení

$$\frac{\eta}{E} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon} \right| = t + \frac{\eta}{E} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \right|$$

$$\frac{\eta}{E} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon} \right| - \frac{\eta}{E} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \right| = t$$

$$\frac{\eta}{E} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \ln \left(\frac{\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon}}{\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0}} \right) = t$$

$$\ln \frac{\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon}}{\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0}} = 2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon}}{\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0}} = e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}}$$

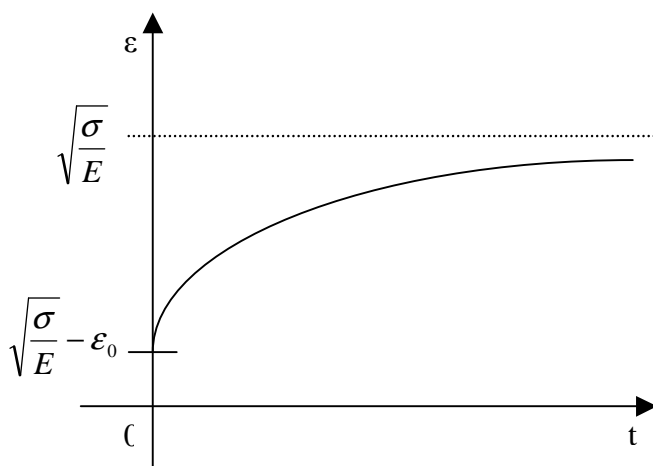
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon} &= \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \\
\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon &= \left(\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon \right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \\
\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon &= \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} - \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \\
\varepsilon + \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} &= \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} - \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \\
\varepsilon \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} \right) &= \sqrt{\frac{\sigma}{E}} \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} - 1 \right) \\
\varepsilon &= \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}} - 1 \right)}{1 + \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} + \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{E}} - \varepsilon_0} \cdot e^{2t \frac{E}{\eta} \sqrt{\frac{\sigma}{E}}}}
\end{aligned}$$

(6.8)

kde ε_0 je počáteční přetvoření v čase t_0 .

Pro přetváření za nekonečně dlouhou dobu vyplývá z výrazu (6.8) limitní hodnota

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{\sigma}{E}}.$$



Obr. 6-4. Průběh přetvoření v modifikovaném modelu Kelvinovy hmoty

3) PROSTÁ DEFORMACE

Model prosté deformace můžeme znázornit pomocí dvou čelistí, kde jedna je pevná, nehybná a druhá pohyblivá. Zajímá nás, jak velkou sílu musíme vynaložit na odtažení pohyblivé čelisti při stále stejné rychlosti tj. prostá deformace nastane při konstantní rychlosti.

Prostá deformace: $\frac{d\varepsilon}{dt} = v = konst$

Celkové napětí paralelního zapojení pružného a vazkého prvku je vyjádřeno součtem napětí v obou větvích jak znázorňuje reologická rovnice (6.1)

$$\sigma = E\varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (6.1)$$

Při konstantní rychlosti přetváření $\frac{d\varepsilon}{dt} = v$, neboli $\frac{\varepsilon}{t} = v \Rightarrow \varepsilon = v \cdot t$ vyplývá pro $t_0 = 0$

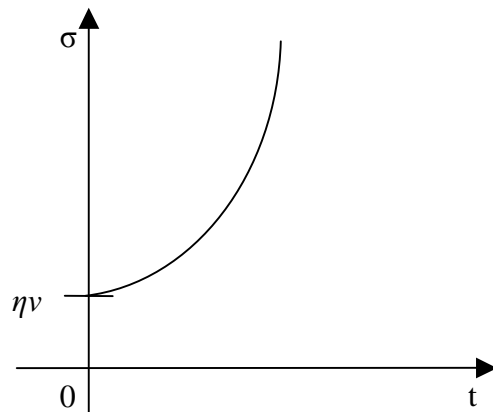
z rovnice (6.1) vztah

$$\underline{\underline{\sigma = E(vt)^2 + \eta v.}} \quad (6.9)$$

Pro napětí za nekonečně dlouhou dobu vyplývá z výrazu (6.9) limitní hodnota

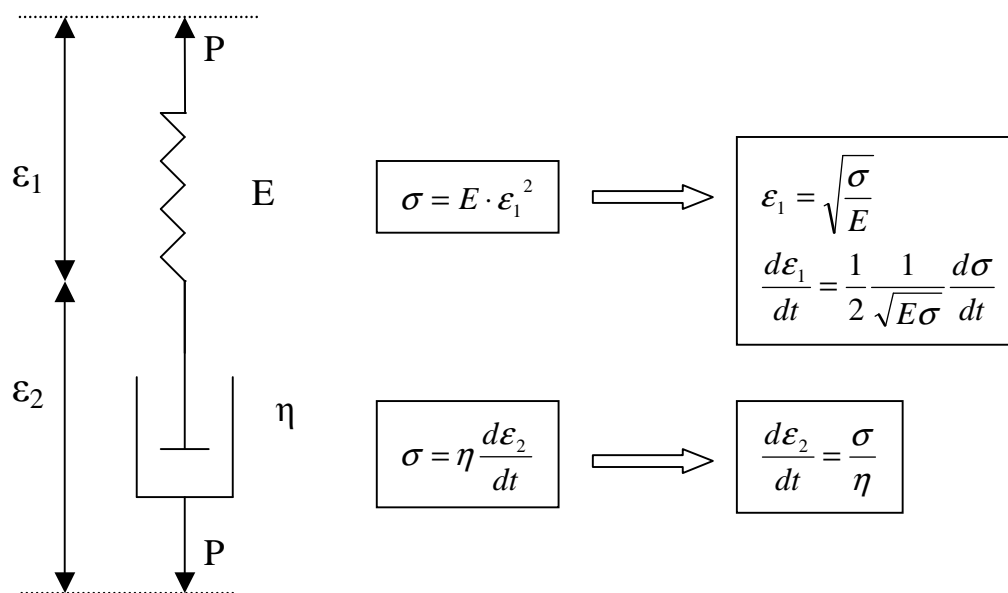
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = \infty ;$$

dochází k zvětšování napětí s časem při konstantní rychlosti přetváření (obr. 6-5).



Obr. 6-5. Průběh modelu prosté deformace modifikované vazkopružné hmoty

6.2. Modifikovaný Maxwellův model



$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

1) RELAXACE

U Maxwellova modelu relaxace budeme pozorovat závislost napětí na čase tj. $\sigma(t)$ při konstantním přetvoření. Využijeme aplikace diferenciální rovnice, která bude vyjadřovat průběh modelu s měnícím se časem.

Počáteční podmínky: $\sigma(t=0) = \sigma_0$

tj. konstantní tloušťka deformace, např. na obou koncích držíme vlákno, tak aby vzdálenost byla stále stejná. Po určité době dochází k zmenšování napětí, a tím se nám i zmenšuje síla, jakoby $\nu = 0$;

Deformace se s časem nemění, v rovnici (6.10) se člen na levé straně rovná nule:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}.$$

Postupné úpravy pro vyjádření závislosti napětí σ na čase t jsou:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{\sigma}{\eta} \\ \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma} \cdot \sigma} &= \frac{-2\sqrt{E}}{\eta} dt \\ \int \frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}} &= \int \frac{-2\sqrt{E}}{\eta} dt \\ \frac{-2}{\sqrt{\sigma}} &= \frac{-2\sqrt{E}}{\eta} t + c \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} &= \frac{\sqrt{E}}{\eta} t + c \end{aligned}$$

(6.11)

Pro výsledné vyjádření závislosti napětí na čase, spočítáme nejprve hodnotu konstanty c z rovnice (6.11), dosazením počátečních podmínek v režimu ochabování tj. $\sigma(t=0) = \sigma_0$, pak obdržíme vztah

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}},$$

(6.12)

zpětně dosadíme hodnotu konstanty c (6.12) do rovnice (6.11):

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{E}}{\eta} t + \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{E \cdot \sigma_0} \cdot t + \eta}{\sqrt{\sigma_0} \cdot \eta}$$

$$\sqrt{\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma_0} \cdot \eta}{\sqrt{E \cdot \sigma_0} \cdot t + \eta}$$

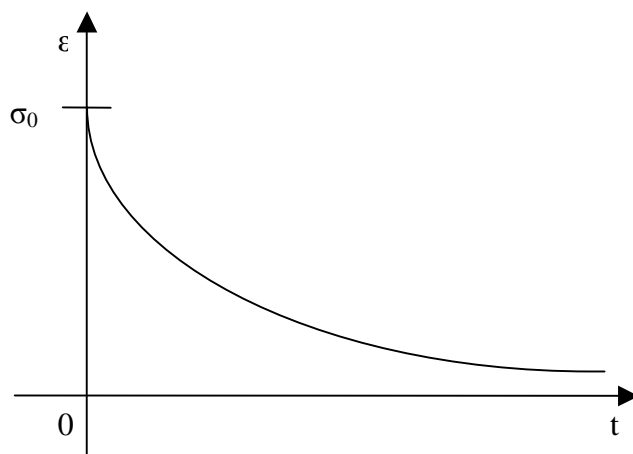
$$\sigma = \frac{\sigma_0 \cdot \eta^2}{E \cdot \sigma_0 \cdot t^2 + 2t\sqrt{E\sigma_0} + \eta^2}$$

$$\sigma = \frac{\eta^2}{E \cdot t^2} + \frac{\sigma_0^{\frac{1}{2}} \cdot \eta^2}{2t\sqrt{E}} + \sigma_0$$

$$\underline{\underline{\sigma = \frac{\eta^2}{E \cdot t^2} + \sigma_0 \left(\frac{\eta^2}{2t\sqrt{E\sigma_0}} + 1 \right)}}$$

(6.13)

Limitní chování modifikovaného modelu je $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = 0$, průběh chování modelu znázorňuje obr.6-6.



Obr. 6-6. Průběh reologického modelu při konstantním přetvoření

2) NAPĚTÍ JE STÁLÉ

Napětí σ se s časem t nemění neboli $\sigma = \sigma_0 = \text{konst.}$

Počáteční podmínky v režimu konstantního napětí: $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$.

Při vyjadřování závislosti deformace ε na čase t vycházíme z úvodní rovnice (6.10), která charakterizuje chování modifikovaného Maxwelllova modelu a v režimu konstantního napětí vychází vztah:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E\sigma}} \frac{d\sigma_0}{dt} + \frac{\sigma_0}{\eta},$$

derivace konstanty σ_0 je nulová, proto první člen na pravé straně předchozí rovnice se rovná nule

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 + \frac{\sigma_0}{\eta}, \quad (\text{separace proměnných})$$

$$d\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} dt$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + c$$

(6.14)

Snadno zjistíme hodnotu konstanty c rovnice (6.14), když dosadíme počáteční podmínky režimu při konstantním napětí tj. $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$, získáme velmi jednoduchý vztah: $\varepsilon_0 = c$. Zpětně hodnotu konstanty c dosadíme do vztahu (6.14) a výsledná rovnice závislosti přetvoření na čase zní:

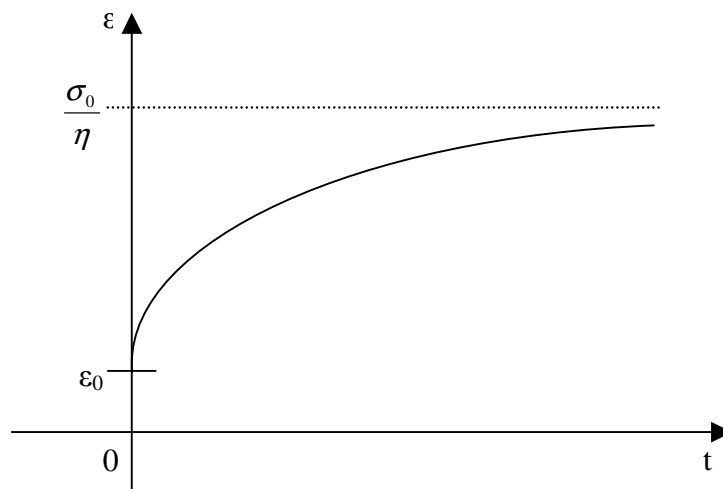
$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \varepsilon_0,$$

(6.15)

kde ε_0 je počáteční přetvoření v čase t_0 .

Křivka závislosti se pro $\varepsilon \rightarrow \infty$ asymptoticky blíží k vodorovné přímce, která je vzdálena od časové osy t o $\frac{\sigma_0}{\eta}$, neboť limitní hodnota rovnice (6.15) pro přetvoření

za nekonečně dlouhou dobu je $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta}$ (obr. 6.6)



Obr. 6-7. Průběh modifikovaného reologického modelu při konstantním napětí

3) PROSTÁ DEFORMACE

V režimu prosté deformace je konstantní rychlost deformace a platí

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = v = \text{konstanta},$$

a zároveň platí vztah pro přetvoření

$$\varepsilon = v \cdot t.$$

Podmínky režimu při konstantní rychlosti deformace dosadíme do úvodní diferenciální rovnice (6.10) a obdržíme vztah:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad / \cdot 2 \cdot \sqrt{E\sigma} \\ 2 \cdot v \sqrt{E\sigma} &= \frac{d\sigma}{dt} + 2\sqrt{E\sigma} \frac{\sigma}{\eta} \quad / - \left(2\sqrt{E\sigma} \frac{\sigma}{\eta} \right) \\ 2 \cdot v \sqrt{E\sigma} - 2\sqrt{E\sigma} \frac{\sigma}{\eta} &= \frac{d\sigma}{dt} \\ 2 \cdot v \sqrt{E\sigma} - 2\sqrt{E} \cdot \frac{1}{\eta} \sigma^{3/2} &= \frac{d\sigma}{dt} \\ 2 \cdot \sqrt{E} \cdot \left(v\sqrt{\sigma} - \frac{1}{\eta} \sigma^{3/2} \right) &= \frac{d\sigma}{dt} \quad (\text{separace proměnných}) \\ \int dt &= \int \frac{d\sigma}{2 \cdot \sqrt{E} \left(v\sqrt{\sigma} - \frac{1}{\eta} \sigma^{3/2} \right)} \\ \int dt &= \int \frac{d\sigma}{2 \cdot \sqrt{E} \cdot \left(v - \frac{1}{\eta} \sigma \right) \cdot \sigma^{1/2}} \\ \int dt &= \frac{1}{2\sqrt{E}} \int \frac{d\sigma}{\left(v - \frac{1}{\eta} \sigma \right) \cdot \sigma^{1/2}} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Na pravé straně rovnice (6.16) jsme získali složitější vztah. Integraci pravé strany si, když aplikujeme vhodný vzorec, který autor uvádí v publikaci [1]:

$$\boxed{\int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x) \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{ab} \ln \left| \frac{a + bx^{1/2}}{a - bx^{1/2}} \right|}$$

$$a^2 = v \Rightarrow a = \sqrt{v}$$

$$b^2 = \frac{1}{\eta} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{1}{\eta}}$$

Integrací pravé strany rovnice (6.16) pomocí vzorce pro integrály obdržíme:

$$\frac{1}{2\sqrt{E}} \int \frac{d\sigma}{\left(v - \frac{1}{\eta}\sigma\right) \cdot \sigma^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v} \frac{1}{\sqrt{\eta}}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sigma^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \sigma^{\frac{1}{2}}} \right|$$

Integrací obou stran rovnice (6.16) obdržíme vztah

$$t + c = \frac{1}{2\sqrt{E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v} \frac{1}{\sqrt{\eta}}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sigma^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \sigma^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$t + c = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{Ev}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sigma^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \sigma^{\frac{1}{2}}} \right| .$$

(6.17)

Ze vztahu (6.17) si vyjádříme hodnotu konstanty c , když dosadíme podmínky $\sigma(t=0) = \sigma_0$. Platí, že

$$c = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{Ev}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \sqrt{\sigma_0}} \right| .$$

(6.18)

Zpětně dosadíme vztah (6.18) do (6.17), abychom po úpravách získali vyjádření napětí při konstantní rychlosti přetváření.

$$t + \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{Ev}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \sqrt{\sigma_0}} \right| = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{Ev}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}} \right| .$$

Upravíme rovnici, abychom logaritmické funkce měli na pravé straně:

$$t = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{Ev}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}} \right| - \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{Ev}} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}} \right|$$

$$t = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sqrt{Ev}} \cdot \left(\ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}} \right| \right) \quad \bigg/ \cdot \frac{2\sqrt{Ev}}{\sqrt{\eta}}$$

$$\frac{2\sqrt{Ev}}{\sqrt{\eta}} t = \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}} \right|.$$

Podle věty o podílu logaritmů lze upravit vztah na tvar:

$$\frac{2\sqrt{Ev}}{\sqrt{\eta}} t = \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}}{\frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}} \right|$$

Inverzní funkce k logaritmické je exponenciální funkce, platí

$$\exp \frac{2\sqrt{Ev}}{\sqrt{\eta}} t = \frac{\frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma}}}{\frac{\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\sigma_0}}}.$$

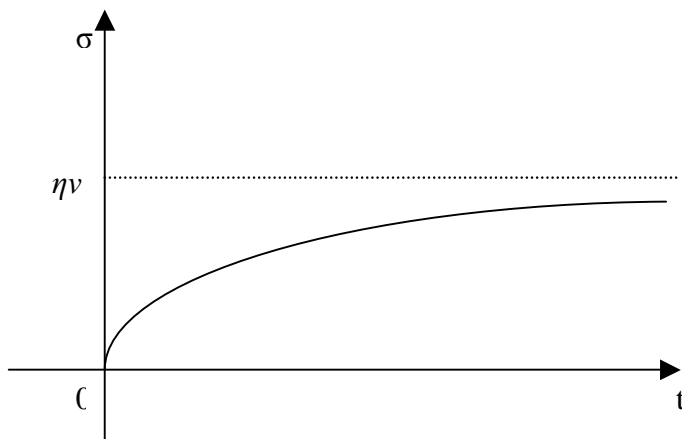
Potřebujeme vyjádřit závislost napětí na čase při konstantním napětí, vztah dále upravujeme.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t = \frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma}} \\
& (\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma}) \cdot \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t = \sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma} \\
& \sqrt{\eta\nu} \cdot \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t - \sqrt{\sigma} \cdot \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t = \sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma} \\
& \sqrt{\eta\nu} \cdot \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t - \sqrt{\eta\nu} = \sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma} \cdot \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t \\
& \sqrt{\eta\nu} \left[\left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t - 1 \right] = \sqrt{\sigma} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t \right) \\
& \sqrt{\sigma} = \sqrt{\eta\nu} \left[\left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t - 1 \right] \cdot \left(1 + \left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t \right)^{-1} \\
& \sigma = \eta\nu \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t - 1 \right]^2 \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{\eta\nu} + \sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\eta\nu} - \sqrt{\sigma_0}} \right) \exp \frac{2\sqrt{E\nu}}{\sqrt{\eta}} t + 1 \right)^{-2} .
\end{aligned}$$

(6.19)

Limitní vyjádření napětí za nekonečně dlouhou dobu při konstantní deformaci:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = n \cdot \nu .$$



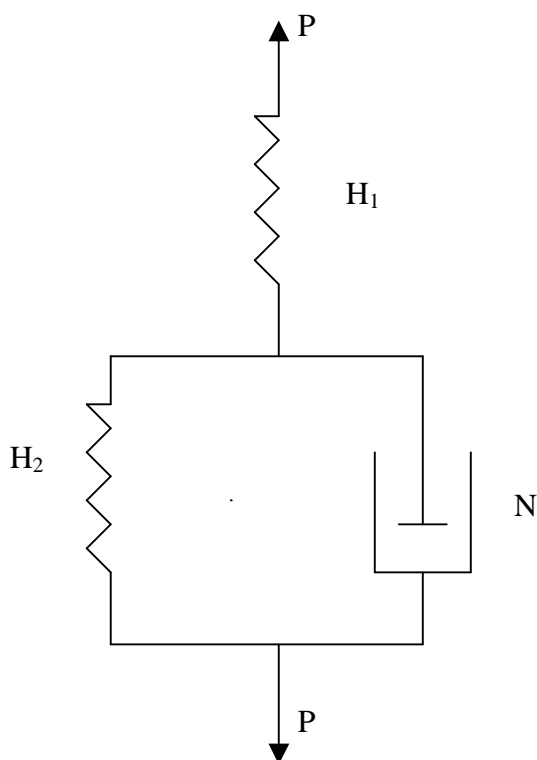
Obr. 6-8. Průběh modifikovaného reologického modelu v režimu prosté deformace

7. Skládání reologických modelů

Detailně jsme se seznámili se základními modely viskoelastické látky, které byly složeny ze dvou nejjednodušších reologických elementů. V následující kapitole se budeme zabývat skládáním těchto jednoduchých modelů, kdy daný model je složen ze dvou pružin a jednoho pístu. V úvodních dvou kapitolách budou složeny reologické modely s lineární závislostí u pružného prvku, třetí a čtvrtá kapitola ukazuje modely s pružným prvkem, který je úměrný druhé mocnině přetvoření. Nejprve modely vyjádříme diferenciální rovnicí a následně budeme zkoumat chování modelů v jednotlivých režimech mechanického namáhání.

7.1. Poyntingova-Thompsonova hmota

Připojíme-li sériově pružný prvek H_1 k modelu Kelvinovy hmoty získáme další reologický model, který se nazývá Poyntingova – Thompsonova hmota (obr. 7.1).



Obr. 7.1. Reologický model Poyntingovy – Thompsonovy hmoty

Na obrázku 7.1 vidíme, že prvek H_1 a skupina H_2-N jsou zapojeny v řadě za sebou, proto napětí v obou částech větví je stejné, ale daná přetvoření ε_1 a ε_2 jsou poměrná. Chování modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty vyjádřené pomocí diferenciální rovnice [13]

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1 = E_2 \cdot \varepsilon_2 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad (7.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (7.2)$$

Již umíme vyjádřit vztah pro přetvoření u pružného prvku H_1

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1}. \quad (7.3)$$

Vyjádření přetvoření ε_2 reologického modelu získáme dosadíme-li vztah (7.3) do (7.2) a platí tedy

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \quad (7.4)$$

derivací vztahu (7.4) obdržíme

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (7.5)$$

Vztahy (7.3) a (7.5) zpětně dosadíme do rovnice (7.1) a získáme další vztah [13]

$$\begin{aligned} \sigma &= E_1 \cdot \frac{\sigma}{E_1} = E_2 \cdot \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right) + \eta \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \right) \\ \sigma &= E_2 \cdot \varepsilon - E_2 \cdot \frac{\sigma}{E_1} + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \\ \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma &= E_2 \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Následně si vyjádříme diferenciální rovnici, která bude charakterizovat reologický model v mechanických režimech.

1) RELAXACE

V režimu relaxace nás zajímá závislost napětí σ na čase t při konstantním přetvoření. Platí vyjádření, při konstantní deformaci, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{konstanta}$ a počáteční podmínky jsou $\sigma(t=0) = \sigma_0$.

Při přetvoření ε_0 , které se nemění s časem, se poslední člen rovnice (7.6) rovná nule, neboť derivace konstanty je nulová

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma &= E_2 \cdot \varepsilon_0 + \eta \frac{d\varepsilon_0}{dt} \\ \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma &= E_2 \cdot \varepsilon_0\end{aligned}\tag{7.7}$$

Integrací obyčejné diferenciální rovnice (7.7) získáme vztah (7.9). V následujících řádcích je řešena integrace rovnice (7.7):

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} &= E_2 \cdot \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma \\ \int \frac{d\sigma}{E_2 \cdot \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma} &= \frac{E_1}{\eta} \int dt \\ -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \ln \left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma \right| &= \frac{E_1}{\eta} t + c\end{aligned}\tag{7.8}$$

Zjistíme si hodnotu konstanty c rovnice (7.8), když dosadíme počáteční podmínky $\sigma(t=0) = \sigma_0$ a obdržíme

$$c = -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \ln \left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma_0 \right|$$

danou hodnotu c zpětně dosadíme do (7.8) a získáme nový vztah

$$\begin{aligned}
& -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \ln \left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma \right| = \frac{E_1}{\eta} t - \frac{E_1}{E_1 + E_2} \ln \left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 \right| \\
& -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \ln \left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma \right| - \ln \left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 \right| = \frac{E_1}{\eta} t \\
& \ln \frac{\left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma \right|}{\left| E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 \right|} = -\frac{E_1 + E_2}{E_1} \cdot \frac{E_1}{\eta} t \\
& E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma = \exp \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right) \left[E_2 \varepsilon_0 - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 \right] \\
& \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma = \exp \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right) \left[-E_2 \varepsilon_0 + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 \right] + E_2 \varepsilon_0 \\
& \sigma = \frac{-E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \exp \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right) + \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 \exp \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right) + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_0
\end{aligned}$$

Daný výraz zjednodušíme a získáme výsledný vztah pro dopružování [13]

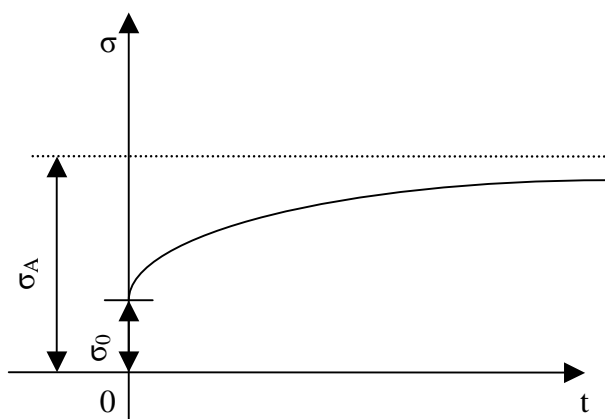
$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left[1 - \exp \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right) \right] + \sigma_0 \exp \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right), \quad (7.9)$$

kde σ_0 je počáteční přetvoření v čase t_0 .

Pro napětí za nekonečně dlouhou dobu vyplývá z výrazu (7.9) limitní hodnota

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = \varepsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} = \sigma_A.$$

Průběh grafu reologického modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty v režimu relaxace názorně ukazuje obr. 7-2.



Obr. 7-2. Průběh reologického modelu při konstantním napětí

2) NAPĚTÍ JE STÁLÉ

V režimu, kdy napětí σ_0 se nemění s časem t , nás zajímá závislost přetvoření reologického modelu na čase tj. $\varepsilon(t)$. Počáteční podmínky pro daný režim jsou $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$.

Při napětí σ_0 , které se nemění s časem, je první člen rovnice (7.6) roven nule a získáme další vztah [13]

$$\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)\sigma_0 = E_2 \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (7.10)$$

Integrací diferenciální rovnice (7.10) obdržíme vztah pro dopružování (7.12)

$$\frac{\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)\sigma_0 - E_2 \cdot \varepsilon}{\eta} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int dt = \int \frac{\eta}{\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)\sigma_0 - E_2 \cdot \varepsilon} d\varepsilon$$

$$\frac{\eta}{E_2} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1}\right)\sigma_0 - \varepsilon} d\varepsilon = \int dt$$

$$-\frac{\eta}{E_2} \ln \left| \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) \sigma_0 - \varepsilon \right| = t + c$$

(7.11)

Pro další úpravy rovnice (7.11) nejprve dopočítáme hodnotu konstanty c , když dosadíme počáteční podmínky $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$ do vztahu (7.11) a obdržíme

$$c = -\frac{\eta}{E_2} \ln \left| \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) \sigma_0 - \varepsilon_0 \right|,$$

vyjádření konstanty c dosadíme do rovnice (7.13) a získáme další významný vztah

$$-\frac{\eta}{E_2} \ln \left| \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) \sigma_0 - \varepsilon \right| = t - \frac{\eta}{E_2} \ln \left| \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) \sigma_0 - \varepsilon_0 \right|,$$

vztah budeme upravovat, dokud nezískáme vyjádření závislosti přetvoření na čase $\varepsilon(t)$.

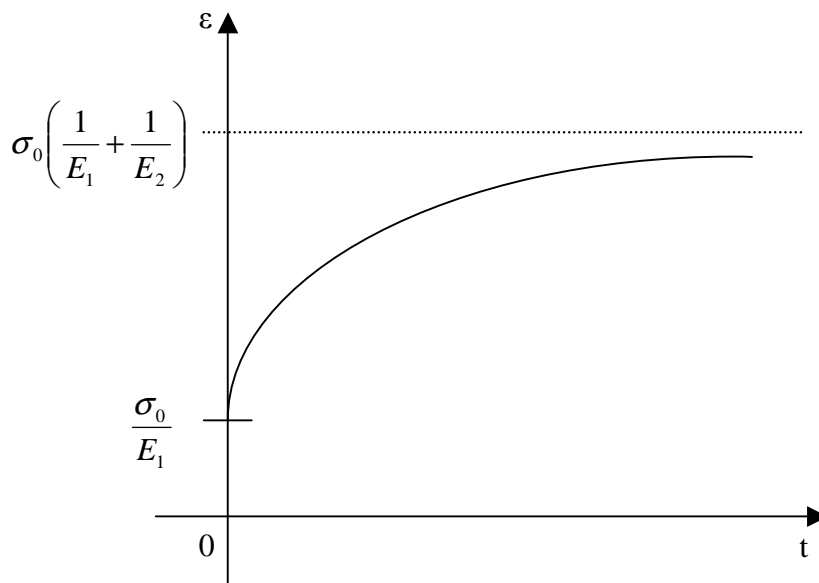
$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{E_2} \ln \left| \frac{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon_0} \right| &= t \\ \ln \left| \frac{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon_0} \right| &= -\frac{E_2}{\eta} t \\ \frac{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon_0} &= e^{-\frac{E_2}{\eta} t} \\ \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon &= \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) - \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \\ -\varepsilon &= \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \sigma_0 - \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \end{aligned}$$

Po poslední úpravě rovnice získáme výsledný vztah [13]

$$\underline{\underline{\varepsilon = \left(\frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \right] + \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right).}} \quad (7.12)$$

Limitní hodnota výrazu (7.12) za nekonečně dlouhou dobu je $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$.

Průběh chování modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty znázorňuje obr. 7-3.



Obr. 7-3. Průběh dopružování Poyntingovy-Thompsonovy hmoty.

3) PROSTÁ DEFORMACE

Při stálé rychlosti přetváření platí, že $v = \frac{d\varepsilon}{dt}$, dále platí $\varepsilon = v \cdot t$. Pro $t_0 = 0$ vyplývá

z rovnice (7.6):

$$\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma = E_2 \cdot v \cdot t + \eta \cdot v$$

$$\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma = v \cdot (E_2 \cdot t + \eta)$$

(7.13)

Obyčejnou diferenciální rovnici (7.13) vyřešíme, nejprve homogenní část.

Homogenní část:

$$\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma = 0$$

$$\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} = - \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E_1}{\eta} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) dt$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E_1 + E_2}{\eta} dt$$

$$\ln|\sigma| = -\frac{E_1 + E_2}{\eta} t + c$$

$$\sigma_H = c \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right)$$

(7.14)

Partikulární část:

$$\sigma_P = c(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right)$$

(7.15)

Derivujeme-li vztah (7.15) získáme

$$\sigma'_P = c'(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) + c(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \cdot \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta}\right)$$

Dané vyjádření vztahů σ a σ' dosadíme do diferenciální rovnice (7.13):

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{E_1} \cdot \left[c'(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) + c(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \cdot \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta}\right) \right] + \\ + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) c(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) = v \cdot (E_2 \cdot t + \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'(t) \cdot \frac{\eta}{E_1} \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) + c(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \cdot \frac{\eta}{E_1} \cdot \left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta}\right) + \\ + \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) c(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) = v \cdot (E_2 \cdot t + \eta) \end{aligned}$$

$$c'(t) \cdot \frac{\eta}{E_1} \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) = v \cdot (E_2 \cdot t + \eta)$$

$$c'(t) = \frac{E_1}{\eta} v \cdot (E_2 \cdot t + \eta) \cdot \exp\frac{E_1 + E_2}{\eta} t$$

$$c'(t) = \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} v t + \eta \frac{E_1}{\eta} v \right) \cdot \exp\frac{E_1 + E_2}{\eta} t$$

$$c'(t) = \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} v t + E_1 v \right) \cdot \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t$$

$$c'(t) = \frac{E_1 E_2 v}{\eta} t \cdot \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t + E_1 v \cdot \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t$$

$$c(t) = \frac{E_1 E_2 v}{\eta} \int \left(t \cdot \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right) dt + E_1 v \cdot \int \left(\exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right) dt$$

Pravou stranu integrujeme pomocí vzorců z publikace [1]:

$$\boxed{\int x e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right]}$$

$$\boxed{\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}}$$

$$c(t) = \frac{E_1 E_2 v}{\eta} \cdot \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \cdot \left(\frac{t}{\frac{E_1 + E_2}{\eta}} - \frac{1}{\left(\frac{E_1 + E_2}{\eta} \right)^2} \right) + \frac{E_1 v \eta}{E_1 + E_2} \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t$$

$$c(t) = \frac{E_1 E_2 v}{\eta} \cdot \frac{\frac{E_1 + E_2}{\eta} t - 1}{\left(\frac{E_1 + E_2}{\eta} \right)^2} \cdot \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t + \frac{E_1 v \eta}{E_1 + E_2} \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t$$

$$c(t) = \frac{E_1 E_2 v}{\eta} \cdot \frac{(E_1 + E_2)t - 1}{\frac{\eta}{(E_1 + E_2)^2}} \cdot \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t + \frac{E_1 v \eta}{E_1 + E_2} \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t$$

$$c(t) = \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \left[\frac{E_1 E_2 v}{\eta} \cdot \frac{\eta[(E_1 + E_2)t - 1]}{(E_1 + E_2)^2} + \frac{E_1 v \eta}{E_1 + E_2} \right]$$

$$c(t) = \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \left[\frac{(E_1 + E_2) E_1 E_2 v t - 1 + E_1 v \eta (E_1 + E_2)}{(E_1 + E_2)^2} \right]$$

$$c(t) = \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \left[\frac{E_1^2 E_2 v t + E_1 E_2^2 v t - 1 + E_1^2 v \eta + E_1 E_2 v \eta}{(E_1 + E_2)^2} \right]$$

$$c(t) = \exp \frac{E_1 + E_2}{\eta} t \left[\frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} v t + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v - \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \right]$$

(7.16)

Připomeňme si tvar rovnice (7.15): $\sigma_P = c(t) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right)$,

dosazením vztahu (7.16) obdržíme výraz

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \cdot \exp\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \cdot \left[\frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v - \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \right] \\ \sigma_P &= \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v - \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} + K \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right)\end{aligned}\quad (7.17)$$

Konstantu K zjistíme dosazením hodnot $\sigma(t=0) = \sigma_0$ do vztahu (7.17):

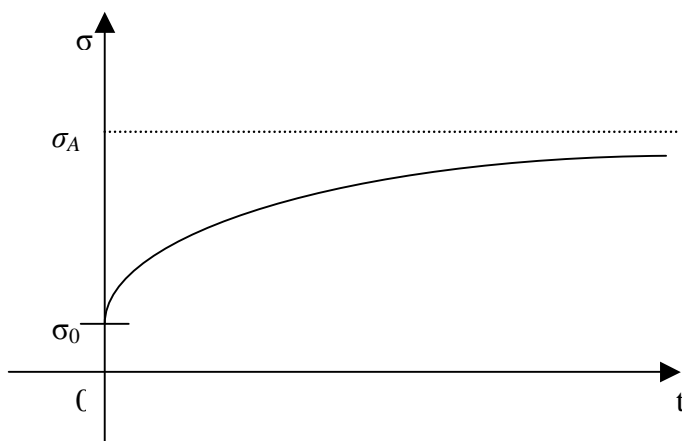
$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v - \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} + K \\ K &= \sigma_0 - \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt - \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v + \frac{1}{(E_1 + E_2)^2}\end{aligned}$$

Zpětně hodnotu konstanty K dosadíme do (7.17):

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v - \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} + \\ &+ \left[\sigma_0 - \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt - \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v + \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \right] \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \\ \sigma_P &= \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v - \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} + \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \sigma_0 - \\ &- \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt - \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v + \\ &+ \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \\ \sigma &= \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} vt \left[1 - \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \right] + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta v \left[1 - \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \right] - \\ &- \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \right] + \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \sigma_0.\end{aligned}\quad (7.18)$$

Limitní hodnota pro napětí za nekonečně dlouhou dobu vyplývá z (7.18)

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma &= \frac{E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \nu + \frac{E_1^2 + E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \eta \nu - \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} = \\
&= \frac{(E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2) \nu + (E_1^2 + E_1 E_2) \eta \nu - 1}{(E_1 + E_2)^2} = \frac{E_1 E_2 (E_1 + E_2) \nu + E_1 (E_1 + E_2) \eta \nu - 1}{(E_1 + E_2)^2} = \\
&= \frac{E_1 E_2 (E_1 + E_2) \nu + E_1 (E_1 + E_2) \eta \nu - 1}{(E_1 + E_2)^2} = \frac{E_1 E_2 \nu + E_1 \eta \nu - \frac{1}{E_1 + E_2}}{(E_1 + E_2)} = \sigma_A.
\end{aligned}$$



Obr. 7-4. Průběh modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty v režimu prosté deformace

7.2. Modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty I. (přetvoření prvku H_1 je úměrné druhé mocnině)

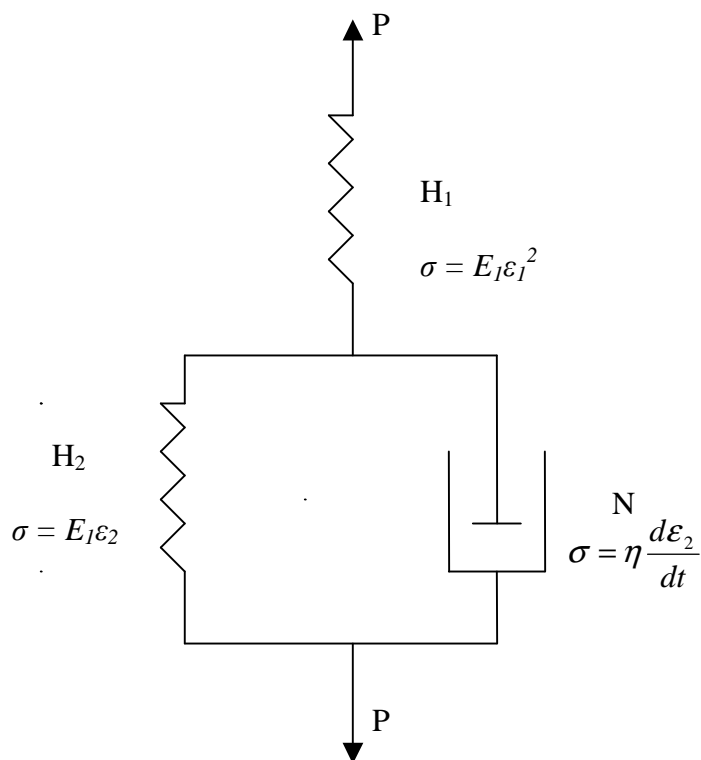
Modifikace modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty spočívá ve změně napětí přenášené pružným prvkem H_1 , jež je úměrné druhé mocnině přetvoření $\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1^2$. Napětí, které přenáší pružný prvek H_2 je úměrné danému přetvoření $\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1$, tj. zůstává stejné jako u Poyntingovy - Thompsonovy hmoty. Na obr. 7-5 máme znázorněn modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty.

Vyjádření diferenciální rovnice pro tento model je obdobný jako u modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty s tím rozdílem, že napětí pružiny H_1 je úměrné druhé mocnině přetvoření. Napětí v obou částech větví je stejné, kdežto přetvoření ε_1 a ε_2 jsou v poměru.

Platí tedy, že

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1^2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad (7.19)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (7.20)$$



Obr. 7-5. Modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty

Ze vztahu (7.19) vyloučíme veličiny přetvoření ε_1 a ε_2 .

$$\begin{aligned} \sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1^2 &\Rightarrow \varepsilon_1^2 = \frac{\sigma}{E_1} \\ &\Downarrow \\ \varepsilon_1 &= \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Z rovnice (7.20) víme, že $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$, za člen ε_1 dosadíme vyjádřený vztah (7.21):

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}}, \quad (7.22)$$

derivací daného vztahu (7.22) obdržíme

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E_1\sigma}} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (7.23)$$

Vyjádřené vztahy přetvoření (7.21), (7.22) a (7.23) dosadíme zpětně do původní diferenciální rovnice (7.19) a získáme:

$$\sigma = E_1 \cdot \frac{\sigma}{E_1} = E_2 \cdot \left(\varepsilon - \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} \right) + \eta \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E_1\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} \right),$$

po úpravě daného vztahu obdržíme rovnici vyjadřující modifikovaný model

$$\begin{aligned} \sigma &= E_2 \cdot \varepsilon - E_2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2} \eta \frac{1}{\sqrt{E_1\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} \\ \sigma + E_2 \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} + \frac{1}{2} \eta \frac{1}{\sqrt{E_1\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} &= E_2 \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{\sqrt{E_1\sigma}} \right) \sigma &= E_2 \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Opět prozkoumáme chování modifikovaného modelu v režimu relaxace a v režimu při konstantním přetvoření.

1) RELAXACE

Model relaxace vyjadřuje závislost napětí na čase $\sigma(t)$. Relaxace reologického modelu s kvadratickým členem u jednoho pružného prvku je model, kde dochází ke konstantní deformaci materiálu.

Konstantní deformace: $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{konst}$

Počáteční podmínky: $\sigma(t = 0) = \sigma_0$

Při přetvoření ε_0 , které se nemění s časem, se poslední člen rovnice (7.24) rovná nule a pro ochabování plyne tedy vztah:

$$\sigma + E_2 \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} + \frac{1}{2} \eta \frac{1}{\sqrt{E_1\sigma}} \frac{d\sigma}{dt} = E_2 \cdot \varepsilon_0$$

$$\frac{1}{2} \eta \frac{1}{\sqrt{E_1} \sigma} \frac{d\sigma}{dt} = E_2 \cdot \varepsilon_0 - \sigma - E_2 \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1}} \frac{d\sigma}{dt} = E_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\sigma} - \sigma^{\frac{3}{2}} - \frac{E_2}{\sqrt{E_1}} \sigma \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int \frac{d\sigma}{E_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\sigma} - \sigma^{\frac{3}{2}} - \frac{E_2}{\sqrt{E_1}} \sigma} = 2 \cdot \int \frac{\sqrt{E_1}}{\eta} dt$$

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{1}{2}} \left[E_2 \varepsilon_0 - \sigma - \frac{E_2}{\sqrt{E_1}} \sigma^{\frac{1}{2}} \right]} = 2 \cdot \int \frac{\sqrt{E_1}}{\eta} dt$$

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{1}{2}} \left[E_2 \varepsilon_0 - \sigma \left(1 + \frac{E_2}{\sqrt{E_1}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \right) \right]} = 2 \cdot \frac{\sqrt{E_1}}{\eta} t + c$$

Integrovaní levé strany rovnice je velmi složité, můžeme danou rovnici řešit numericky.

Vyjádříme si pro danou rovnici pro čas t :

$$t = \frac{\eta}{2\sqrt{E_1}} \left[\int \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{1}{2}} \left[E_2 \varepsilon_0 - \sigma \left(1 + \frac{E_2}{\sqrt{E_1}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \right) \right]} - c \right]$$

(7.25)

2) KONSTANTNÍ NAPĚTÍ

Již několikrát bylo uváděno, že pro režim s konstantním napětím σ_0 platí počáteční podmínky pro přetvoření tj. $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$. Vycházíme z rovnice (7.24), do které dané podmínky začleníme.

$$\frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \frac{d\sigma_0}{dt} + \left(1 + \frac{E_2}{\sqrt{E_1} \sigma_0} \right) \sigma_0 = E_2 \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt},$$

protože napětí σ_0 je konstantní, první člen rovnice se rovná nule a dostáváme vztah

$$\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} = E_2 \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad / - E_2 \varepsilon$$

$$\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\frac{d\varepsilon}{\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon} = \frac{1}{\eta} dt$$

Integrace levé strany budeme provádět pomocí vzorce [1], velmi se nám usnadní výpočty.

$$\boxed{\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b|}$$

$$a = -E_2$$

$$b = \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}}$$

Dosazením hodnot a a b do vzorce získáme

$$-\frac{1}{E_2} \ln \left| \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon \right| = \frac{1}{\eta} t + c, \quad (7.26)$$

dopočítáme hodnotu konstanty c ve vztahu (7.26) dosazením počátečních podmínek $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$.

$$c = -\frac{1}{E_2} \ln \left| \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0 \right|,$$

zpětně vypočítanou hodnotu c dosadíme do (7.26) a získáme vztah:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{E_2} \ln \left| \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon \right| &= \frac{1}{\eta} t - \frac{1}{E_2} \ln \left| \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0 \right| \\ -\frac{1}{E_2} \left[\ln \left| \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon \right| - \ln \left| \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0 \right| \right] &= \frac{1}{\eta} t \\ -\frac{1}{E_2} \cdot \ln \left| \frac{\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon}{\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0} \right| &= \frac{1}{\eta} t \\ \ln \left| \frac{\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon}{\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0} \right| &= -\frac{E_2}{\eta} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon}{\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0} = \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \\
& \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon = \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \cdot \left(\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0\right) \\
& -E_2 \cdot \varepsilon = \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \cdot \left(\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0\right) - \sigma_0 - E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} \\
& E_2 \cdot \varepsilon = \sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \left(\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0\right) \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \\
& \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_2} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \frac{1}{E_2} \left(\sigma_0 + E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \cdot \varepsilon_0\right) \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \\
& \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_2} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \left(-\frac{\sigma_0}{E_2} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \varepsilon_0\right) \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)
\end{aligned}$$

Dané vyjádření ještě roznásobíme, abychom utřídili jednotlivé členy.

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_2} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \frac{\sigma_0}{E_2} \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) + \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)$$

Seskupíme členy obsahující napětí a členy s přetvořením.

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_2} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)\right] + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)\right] + \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)$$

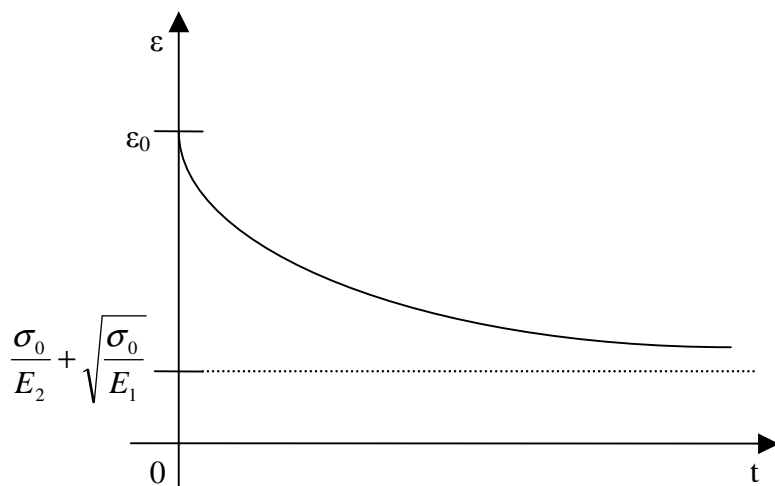
Vztah obsahuje stejné výrazy pod hranatými závorkami, proto úprava na výsledný tvar

$$\underline{\underline{\varepsilon = \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)\right] \cdot \left(\frac{\sigma_0}{E_2} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}}\right) + \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)}} \quad (7.27)$$

Pro přetvoření za nekonečně dlouho dobu vyplývá ze vztahu (7.27)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_2} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}}.$$

Dané limitní vyjádření lze graficky porovnat na obr. 7-6.



Obr. 7-6. Dopružování modifikovaného modelu

7.3. Modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty II. (přetvoření prvku H_2 je úměrné druhé mocnině)

Na obr. 7-7 názorně vidíme, sestavení reologického modelu, který má u pružného prvku H_1 přetvoření, které je přímo úměrné a u prvku H_2 je dané přetvoření rovno druhé mocnině. Pružný prvek H_1 je připojen sériově k reologickému modelu Kelvinovy hmoty.

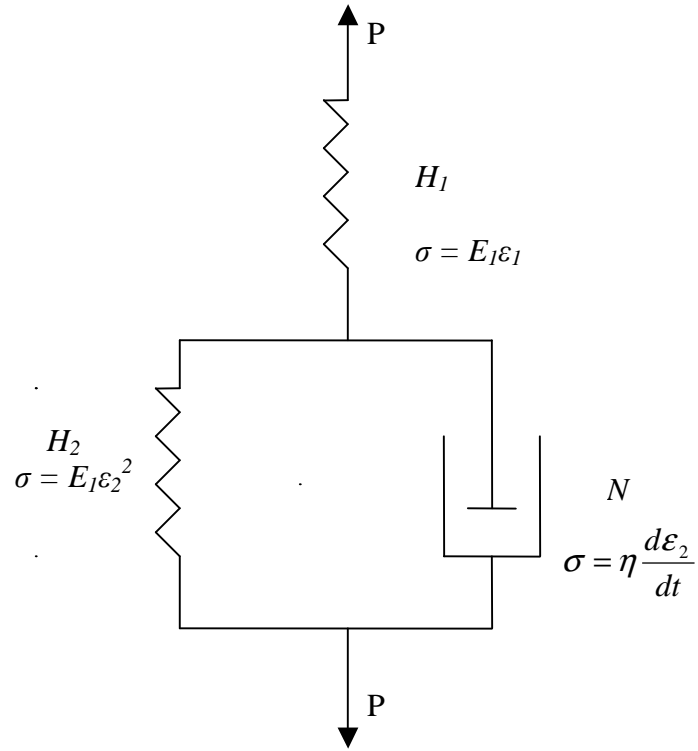
Modifikovaný reologický model vyjádříme pomocí diferenciální rovnice, stejným postupem jako u modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty.

Protože prvek H_1 a skupina $H_2 \parallel N$ jsou zapojeny v řadě za sebou, je napětí v obou částech stejné. Svislá čárka v předchozí větě znamená paralelní působení v obou částech H_2 a N .

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1 = E_2 \cdot \varepsilon_2^2 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad (7.28)$$

Celkové přetvoření vyjádříme součtem jednotlivých přetvoření ε_1 a ε_2 . Vyjádřením pomocí rovnice tedy platí

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (7.29)$$



Obr. 7-7. Modifikovaný model

Z rovnice (7.28) si vyjádříme rovnici vyjadřující napětí procházející pružinou H_1 :

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1}$$

po dosazení vyjádření přetvoření ε_1 do rovnice (7.29) obdržíme rovnici

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1}$$

(7.30)

po derivaci předchozí rovnice získáme vztah

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt}$$

(7.31)

$$\sigma = E_1 \cdot \frac{\sigma}{E_1} = E_2 \cdot \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right)^2 + \eta \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \right)$$

$$\sigma = E_2 \cdot \left(\varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma^2}{E_1^2} \right) + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= E_2 \cdot \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{E_2}{E_1} \sigma + \frac{E_2}{E_1^2} \sigma^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \\
\sigma - \frac{E_2}{E_1^2} \sigma^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{E_2}{E_1} \sigma + \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} &= E_2 \cdot \varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \\
\left(-\frac{E_2}{E_1^2} \right) \sigma^2 + \left(1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma + \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} &= E_2 \cdot \varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}
\end{aligned}
\tag{7.32}$$

Jako v předchozích modelech, budeme i zde zkoumat chování reologického modelu v jednotlivých situacích. Nejprve prozkoumáme situaci s konstantní deformací neboli režim relaxace.

1) RELAXACE

Reologický model s kvadratickou závislostí pružiny H_2 při konstantním přetvoření tj. model relaxace, se vyjadřuje v závislosti napětí na čase. Při přetvoření ε_0 , které se nemění s časem, se člen rovnice obsahující derivaci přetvoření rovná nule.

Konstantní deformace: $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{konst}$

Počáteční podmínky: $\sigma(t=0) = \sigma_0$

Při daných podmínkách z původní rovnice (7.32) obdržíme rovnici

$$\left(-\frac{E_2}{E_1^2} \right) \sigma^2 + \left(1 + 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma + \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} = E_2 \cdot \varepsilon_0^2
\tag{7.33}$$

Budeme integrovat rovnici (7.33). Celý postup integrace je uveden následovně

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{E_2}{E_1^2} \right) \sigma^2 + \left(1 + 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma - E_2 \cdot \varepsilon_0^2 &= -\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \\
E_2 \cdot \left[-\frac{\sigma^2}{E_1^2} + \frac{1}{E_2} \sigma + 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \sigma - \varepsilon_0^2 \right] &= -\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \\
E_2 \cdot \left[\sigma \left(-\frac{\sigma}{E_1^2} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) - \varepsilon_0^2 \right] &= -\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-E_2 \cdot \left[\sigma \left(-\frac{\sigma}{E_1^2} + \frac{1}{E_2} + 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) - \varepsilon_0^2 \right] &= \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \\
E_2 \cdot \left[\sigma \left(\frac{\sigma}{E_1^2} - \frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) + \varepsilon_0^2 \right] &= \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \\
\frac{E_1 E_2}{\eta} \cdot \left[\sigma \left(\frac{\sigma}{E_1^2} - \frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) + \varepsilon_0^2 \right] &= \frac{d\sigma}{dt} \\
\frac{E_1 E_2}{\eta} \cdot dt &= \frac{d\sigma}{\sigma \left(\frac{\sigma}{E_1^2} - \frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) + \varepsilon_0^2} \\
\frac{E_1 E_2}{\eta} \cdot dt &= \frac{d\sigma}{\frac{\sigma^2}{E_1^2} - \frac{\sigma}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \sigma + \varepsilon_0^2} \\
\int \frac{E_1 E_2}{\eta} dt &= \int \frac{d\sigma}{\frac{1}{E_1^2} \sigma^2 + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) \sigma + \varepsilon_0^2}
\end{aligned}$$

Pravou stranu rovnice integrujeme podle vzorce [1]

$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right $	pro $b^2 > 4ac$
---	-----------------

$$a = \frac{1}{E_1^2} \quad b = -\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \quad c = \varepsilon_0^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{E_1 E_2}{\eta} t + c &= \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \cdot \\
&\quad \cdot \ln \left| \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \right|
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Dosazením počátečních podmínek $\sigma(t=0) = \sigma_0$ do vztahu (7.34) obdržíme hodnotu konstanty c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \ln \left| \frac{\frac{2}{E_1^2}\sigma_0 + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2}\sigma_0 + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \right|$$

Vyjádřenou hodnotu konstanty c dosadíme zpětně do vztahu (7.34):

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 E_2}{\eta} t + \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \cdot \\ & \quad \cdot \ln \left| \frac{\frac{2}{E_1^2}\sigma_0 + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2}\sigma_0 + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \right| = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \ln \left| \frac{\frac{2}{E_1^2}\sigma + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2}\sigma + \left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \right| \\ & \ln \left| \frac{\frac{2}{E_1^2}\sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2\varepsilon_0}{E_1 E_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2\varepsilon_0}{E_1 E_2}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2}\sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2\varepsilon_0}{E_1 E_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2\varepsilon_0}{E_1 E_2}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \right| - \\ & - \ln \left| \frac{\frac{2}{E_1^2}\sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2\varepsilon_0}{E_1 E_2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2}\sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2\varepsilon_0}{E_1 E_2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \right| = \\ & = -\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2\frac{\varepsilon_0}{E_1}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ln \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} = \\
& \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} = \\
& = -\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}} \\
& \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} = \\
& = \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \cdot \\
& \cdot \exp \left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}} \right) \\
& \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}} \cdot \\
& \cdot \exp \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}} \right) = \\
& = \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{E_2} - 2 \frac{\varepsilon_0}{E_1} \right)^2 - 4 \frac{\varepsilon_0^2}{E_1^2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}} \cdot \exp \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right) = \\
& = \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}} \\
& \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}} \cdot \left[\frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right] \cdot \exp \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right) = \\
& = \frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{E_1^2} \sigma \cdot B \cdot C + B \cdot C \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + B \cdot C \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} = \\
& = \frac{2}{E_1^2} \sigma + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}
\end{aligned}$$

$$B = \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}}$$

$$C = \exp \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{E_1^2} \sigma \cdot B \cdot C - \frac{2}{E_1^2} \sigma + B \cdot C \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + B \cdot C \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} = \\
& = \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{E_1^2} \sigma \cdot B \cdot C - \frac{2}{E_1^2} \sigma = \\
& = \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} - B \cdot C \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) \\
& - B \cdot C \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \\
& \frac{2}{E_1^2} \sigma \cdot (B \cdot C - 1) = \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} - B \cdot C \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \\
& - B \cdot C \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}
\end{aligned}$$

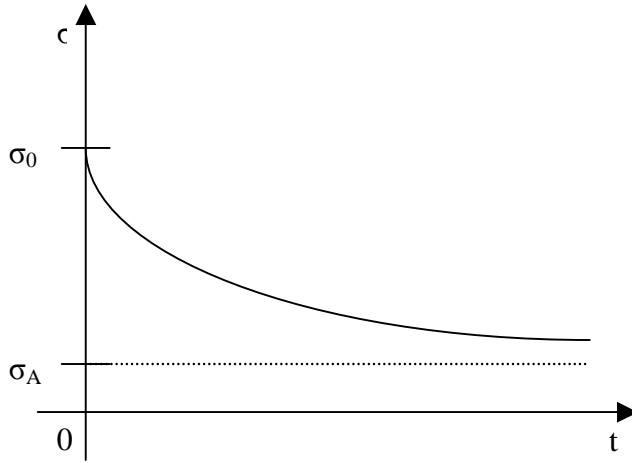
$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{E_1^2}{2(BC-1)} \left[\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) (1-BC) - (1+BC) \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right] \\
\sigma &= \frac{-E_1^2}{2(1-BC)} \left[\left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) (1-BC) - (1+BC) \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right] \\
\sigma &= \frac{-E_1^2}{2(1-BC)} \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) (1-BC) + \frac{E_1^2}{2(1-BC)} (1+BC) \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \\
\sigma &= \frac{E_1^2 + 2E_1 E_2 \varepsilon_0}{2E_2} + \frac{(1+BC)E_1^2}{2(1-BC)} \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \\
\sigma &= \frac{E_1^2}{2} \left[\frac{1 + 2 \frac{E_1 E_2 \varepsilon_0}{E_1^2}}{E_2} + \frac{(1+BC)}{(1-BC)} \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right] \\
\sigma &= \frac{E_1^2}{2} \left[\frac{1}{E_2} + \frac{2\varepsilon_0}{E_1} + \frac{(1+BC)}{(1-BC)} \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right] \\
\sigma &= \frac{E_1^2}{2E_2} + E_1 \varepsilon_0 + \frac{E_1^2}{2} \frac{(1+BC)}{(1-BC)} \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \\
\sigma &= \frac{E_1^2}{2E_2} + E_1 \varepsilon_0 + \frac{E_1^2}{2} \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \left[\frac{1 + B \exp \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right)}{1 - B \exp \left(\frac{E_1 E_2}{\eta} t \cdot \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} \right)} \right]
\end{aligned}$$

(7.35)

$$B = \frac{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}}{\frac{2}{E_1^2} \sigma_0 + \left(\frac{-E_1 - 2E_2 \varepsilon_0}{E_1 E_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}}}.$$

Limitní chování modelu pro napětí za nekonečně dlouhou dobu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = \frac{E_1^2}{2E_2} + E_1 \varepsilon_0 + \frac{E_1^2}{2} \sqrt{\frac{1}{E_2^2} + 4 \frac{\varepsilon_0}{E_2 E_1}} = \text{konstanta} = \sigma_A.$$



Obr. 7-8. Průběh modifikovaného reologického modelu

2) KONSTANTNÍ NAPĚTÍ

Při napětí σ_0 , které se nemění s časem, se třetí člen na levé straně rovnice (7.32) rovná nule. Počáteční podmínky při konstantním napětí jsou $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$.

$$\left(-\frac{E_2}{E_1^2} \right) \sigma_0^2 + \left(1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 = E_2 \cdot \varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\left(-\frac{E_2}{E_1^2} \right) \sigma_0^2 + \left(1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 - E_2 \cdot \varepsilon^2 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\int \frac{dt}{\eta} = \int \frac{d\varepsilon}{\left(-\frac{E_2}{E_1^2} \right) \sigma_0^2 + \left(1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_0 - E_2 \cdot \varepsilon^2}$$

$$\int \frac{dt}{\eta} = \int \frac{d\varepsilon}{\left(-\frac{E_2}{E_1^2} \right) \sigma_0^2 + \sigma_0 + 2\varepsilon \frac{E_2}{E_1} \sigma_0 - E_2 \cdot \varepsilon^2}$$

$$\int \frac{dt}{\eta} = -\frac{1}{E_2} \int \frac{d\varepsilon}{\frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - \frac{\sigma_0}{E_2} - 2\frac{\sigma_0}{E_1}\varepsilon + \varepsilon^2}$$

$$t + c = -\frac{1}{E_2} \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 2\frac{\sigma_0}{E_1}\varepsilon + \frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - \frac{\sigma_0}{E_2}}$$
(7.36)

Pro integraci pravé strany rovnice (7.36) využijeme vyjádření vzorce [1]:

$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right \quad \text{pro } 4ac < b^2.$
--

$$a = 1 \qquad b = -2\frac{\sigma_0}{E_1} \qquad c = \frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - \frac{\sigma_0}{E_2}$$

$$t + c = -\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - 4\left(\frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - \frac{\sigma_0}{E_2}\right)}} \ln \left| \frac{2\varepsilon - 2\frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{4\frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - 4\left(\frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - \frac{\sigma_0}{E_2}\right)}}{2\varepsilon - 2\frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{4\frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - 4\left(\frac{\sigma_0^2}{E_1^2} - \frac{\sigma_0}{E_2}\right)}} \right|$$

$$t + c = -\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\frac{\sigma_0}{E_2}}} \ln \left| \frac{2\varepsilon - 2\frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{4\frac{\sigma_0}{E_2}}}{2\varepsilon - 2\frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{4\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right|$$

$$t + c = -\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}}} \ln \left| \frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right|$$

(7.37)

dosadíme počáteční podmínky $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0$ do vztahu (7.37) a vyjádříme si hodnotu konstanty c ,

$$c = -\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}}} \ln \left| \frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right|.$$

Zpětně konstantu c dosadíme do (7.37)

$$t - \frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}} \ln \left| \frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right| = -\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}} \ln \left| \frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right|$$

$$\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}} \ln \left| \frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{2\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right| - \frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}} \ln \left| \frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right| = -t$$

$$\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}} \left(\ln \left| \frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right| - \ln \left| \frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right| \right) = -t$$

$$\frac{1}{E_2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_2}{\sigma_0}} \ln \left| \frac{\frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}}{\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}} \right| = -t$$

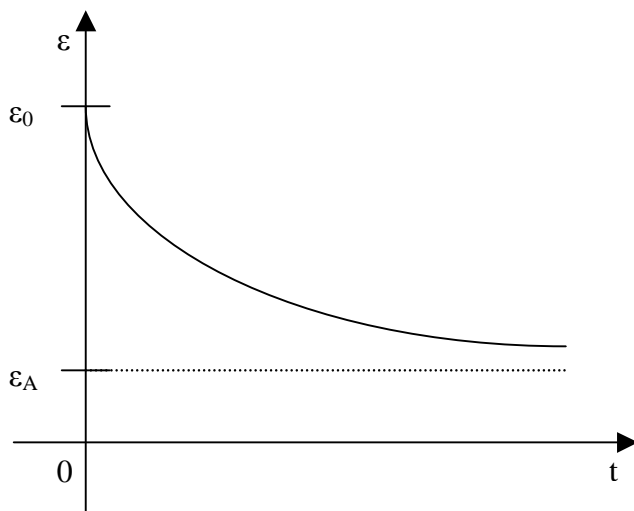
$$\ln \left| \frac{\frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}}{\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}} \right| = -2E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} t$$

$$\frac{\frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}}{\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}} = \exp \left(-2E_2 \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} t \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} &= \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) \\
\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} &= \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \left(\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) \\
\varepsilon - \varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) &= \\
&= \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \left(\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) + \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} \\
\varepsilon \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) \right] &= \\
&= \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \left(\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) + \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} \\
\varepsilon &= \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}}{\varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}} \right) \left(\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} \right) \exp\left(-2E_2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}}t\right) \right]
\end{aligned}
\tag{7.38}$$

Limitní hodnota pro přetvoření za nekonečně dlouhou dobu je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} + \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_2}} = \varepsilon_A.$$



Obr. 7-9. Průběh modifikovaného modelu při konstantním napětí

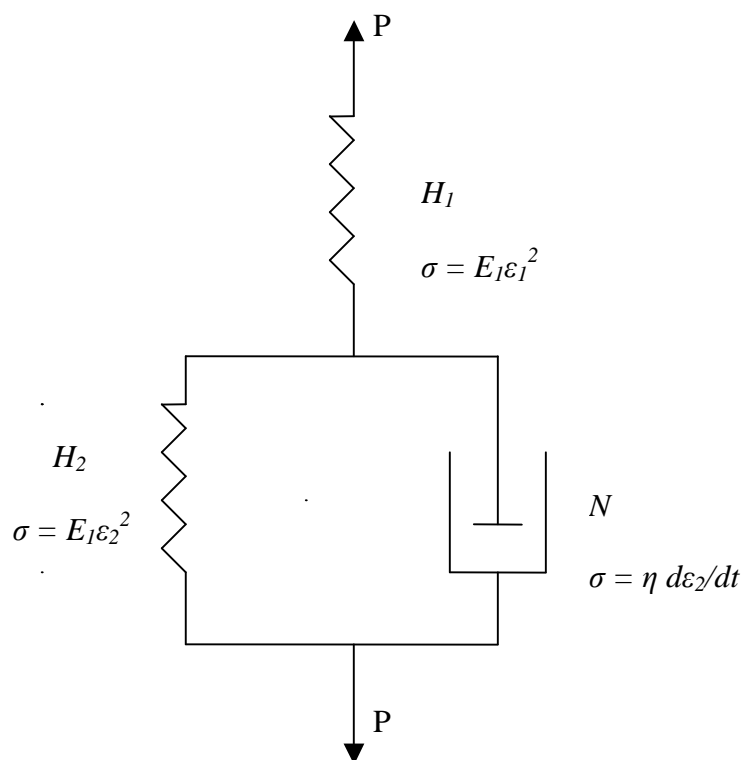
7.4. Modifikovaný model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty III. (oba pružné prvky mají přetvoření úměrné druhé mocnině)

Model složený ze tří prvků, dva pružné a jeden vazký prvek. Obě pružiny mají kvadratickou závislost přetvoření na napětí obr. 7-10. Prvek H_1 a skupina H_2 a N jsou zapojeny v řadě za sebou, napětí je v obou částech stejné a přetvoření je rozděleno rovnoměrně do částí ε_1 a ε_2 . Platí tedy

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1^2 = E_2 \cdot \varepsilon_2^2 + \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad (7.39)$$

a celková deformace modifikovaného modelu Poyntingovy-Thompsonovy hmoty se rovná součtu jednotlivých deformací

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (7.40)$$



Obr. 7-10. Modifikovaný reologický model Poyntingovy-Thompsonovy hmoty

Pomocí rovnice (7.39) si vyjádříme vztahy pro ϵ_1 ,

$$\sigma = E_1 \cdot \epsilon_1^2 \Rightarrow \epsilon_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}}$$

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt}$$

Podle vztahu (7.40) víme, že celková deformace se rovná součtu deformací na jednotlivých elementech reologického modelu $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$, pro deformaci na druhém elementu platí

$$\epsilon_2 = \epsilon - \epsilon_1 = \epsilon - \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}}$$

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt}$$

Předchozí dva vztahy dosadíme do rovnice (7.39) a získáme diferenciální rovnici popisující daný modifikovaný model:

$$\begin{aligned}
E_1 \cdot \frac{\sigma}{E_1} &= E_2 \cdot \left(\varepsilon - \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} \right)^2 + \eta \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt} \right) \\
\sigma &= E_2 \cdot \left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} + \frac{\sigma}{E_1} \right) + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt} \\
\sigma &= E_2 \varepsilon^2 - 2E_2 \varepsilon \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} + E_2 \frac{\sigma}{E_1} + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt} \\
\sigma - \frac{E_2}{E_1} \sigma + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt} + 2E_2 \varepsilon \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} &= E_2 \varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \\
\sigma \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + 2E_2 \varepsilon \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt} &= E_2 \varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} .
\end{aligned}$$

(7.41)

Prozkoumáme chování modelu při jednotlivých režimech, kdy nastane konstantní přetvoření nebo napětí.

1) RELAXACE

Při přetvoření ε_0 , které se nemění s časem, se druhý člen na pravé straně rovnice (7.41) rovná nule. Počáteční podmínky pro daný režim jsou $\sigma(t=0) = \sigma_0$. Z rovnice (7.41) vyplývá

$$\begin{aligned}
\sigma \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + 2E_2 \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt} &= E_2 \varepsilon_0^2 \\
\sigma \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + 2E_2 \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} - E_2 \varepsilon_0^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{E_1 \sigma}} \frac{d\sigma}{dt} \\
-\frac{2\sqrt{E_1}}{\eta} \int dt &= \int \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{d\sigma}{\sigma \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + 2E_2 \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\sigma}{E_1}} - E_2 \varepsilon_0^2} \\
\int \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + 2E_2 \varepsilon_0 \sigma \sqrt{\frac{1}{E_1}} - \sqrt{\sigma} E_2 \varepsilon_0^2} &= -\frac{2\sqrt{E_1}}{\eta} t + c
\end{aligned}$$

(7.42)

Levou stranu rovnice (7.42) budeme integrovat numericky.

2) KONSTATNÍ NAPĚTÍ

Při napětí, které se s časem nemění tj. napětí je stálé, v rovnici (7.41) se třetí člen na levé straně rovná nule. Ještě si uvedeme počáteční podmínky pro daný režim při konstantním napětí: $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$, a tedy dostáváme z rovnice (7.41) vztah

$$\sigma_0 \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) + 2E_2 \varepsilon \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} = E_2 \varepsilon^2 + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\sigma_0 \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) + 2E_2 \varepsilon \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \varepsilon^2 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\frac{1}{\eta} \int dt = \int \frac{d\varepsilon}{\sigma_0 \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) + 2E_2 \varepsilon \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - E_2 \varepsilon^2}$$

$$\frac{1}{\eta} \int dt = \int \frac{d\varepsilon}{-E_2 \varepsilon^2 + 2E_2 \varepsilon \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sigma_0 \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right)}$$

$$\frac{1}{\eta} \int dt = \left(-\frac{1}{E_2}\right) \cdot \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right)}$$

$$-\frac{E_2}{\eta} t + c = \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} \varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right)}$$

Pravou stranu rovnice budeme integrovat pomocí vzorce [1]:

$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right $	pro $b^2 > 4ac$
---	-----------------

$$a = 1 \qquad b = -2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} \qquad c = \sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)$$

$$-\frac{E_2 t}{\eta} + c = \frac{1}{\sqrt{4\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}} \ln \left| \frac{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{4\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{4\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}} \right|$$

(7.43)

Nejprve určíme hodnotu konstanty c ze vztahu (7.43), dosadíme-li počáteční podmínky $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$, následně budeme pokračovat v dalších úpravách, abychom našli vztah závislosti přetvoření na čase.

$$c = \frac{1}{\sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \ln \left| \frac{2\varepsilon_0 - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}}{2\varepsilon_0 - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \right| \quad (7.44)$$

Hodnotu konstanty c (7.44) dosadíme zpětně do rovnice (7.43) a získáme vztah:

$$\begin{aligned} -\frac{E_2 t}{\eta} + \frac{1}{\sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \ln \left| \frac{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}}{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \right| = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \ln \left| \frac{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}}{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \right| \\ \frac{1}{2\sqrt{\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \ln \left[\left| \frac{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}}{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{4\sigma_0\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2}\right)}} \right| \right] = -\frac{E_2 t}{\eta} \end{aligned}$$

$$\ln \left| \frac{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{4\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{4\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}} \cdot \frac{2\varepsilon_0 - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{4\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}{2\varepsilon_0 - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{4\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}} \right| = -\frac{2E_2 t}{\eta} \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - 2\sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}{2\varepsilon - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + 2\sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}} = \\ & = \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)} \right] \cdot \frac{2\varepsilon_0 - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - 2\sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}{2\varepsilon_0 - 2\sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + 2\sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}} \end{aligned}$$

$$\frac{\varepsilon - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}{\varepsilon - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}} = \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)} \right] \cdot \frac{\varepsilon_0 - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} - \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}{\varepsilon_0 - \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}} + \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}$$

$$\boxed{A = \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}}$$

$$\boxed{B = \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}}}$$

$$\varepsilon - B - A = \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \cdot (\varepsilon - B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right]$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \cdot (\varepsilon - B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B + A$$

$$\varepsilon - \varepsilon \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} = \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \cdot (-B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B + A$$

$$\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \right) = \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \cdot (-B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B + A$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0 - B + A - \varepsilon_0 + B + A}{\varepsilon_0 - B + A} \right) &= \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \cdot (-B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B + A \\
\varepsilon \left(\frac{2A}{\varepsilon_0 - B + A} \right) &= \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \cdot (-B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B + A \\
\varepsilon &= \frac{\varepsilon_0 - B - A}{\varepsilon_0 - B + A} \cdot \frac{\varepsilon_0 - B + A}{2A} (-B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B \frac{\varepsilon_0 - B + A}{2A} + A \frac{\varepsilon_0 - B + A}{2A} \\
\varepsilon &= \frac{\varepsilon_0 - B - A}{2A} \cdot (-B - A) \cdot \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B \frac{\varepsilon_0 - B + A}{2A} + A \frac{\varepsilon_0 - B + A}{2A} \\
\varepsilon &= (-B) \frac{\varepsilon_0 - B - A}{2A} \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] - A \frac{\varepsilon_0 - B - A}{2A} \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] + B \frac{\varepsilon_0 - B + A}{2A} + \\
&\quad + A \frac{\varepsilon_0 - B + A}{2A} \\
\varepsilon &= B \frac{\varepsilon_0 - B - A}{2A} \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] \right\} + A \frac{\varepsilon_0 - B - A}{2A} \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] \right\} \\
\varepsilon &= \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] \right\} \cdot \left[B \frac{\varepsilon_0 - B - A}{2A} + A \frac{\varepsilon_0 - B - A}{2A} \right] \\
\varepsilon &= \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] \right\} \cdot \left[\frac{B\varepsilon_0 - B^2 - AB + A\varepsilon_0 - AB - A^2}{2A} \right] \\
\varepsilon &= \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] \right\} \cdot \left[\frac{\varepsilon_0(A+B) - (A^2 + 2AB + B^2)}{2A} \right] \\
\varepsilon &= \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{2E_2 t}{\eta} A \right] \right\} \cdot \left[\frac{\varepsilon_0(A+B) - (A+B)^2}{2A} \right]
\end{aligned} \tag{7.45}$$

$$A = \sqrt{\sigma_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} \right)}$$

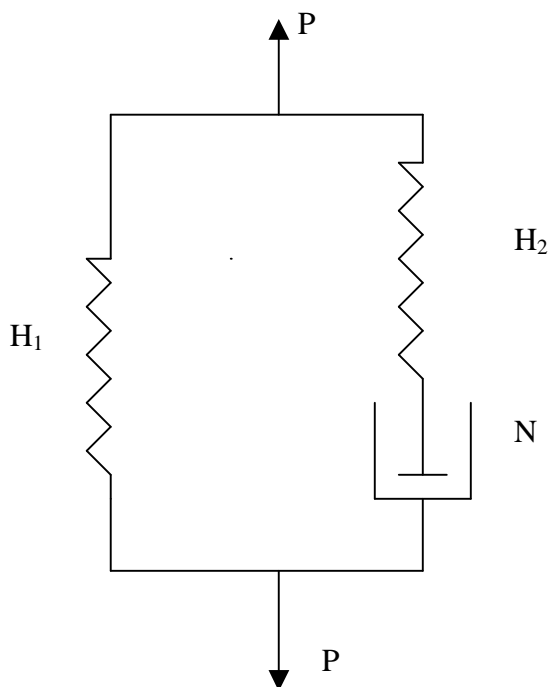
$$B = \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}}$$

Limitní chování modelu plyne z výrazu (7.45) pro přetvoření za nekonečně dlouhou dobu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\varepsilon_0(A+B) - (A+B)^2}{2A}.$$

8. Zenerova hmota

V následující kapitole budeme zkoumat model skládající se ze dvou pružin a jednoho vazkého prvku, jako tomu bylo u Poyntingovy-Thompsonovy hmoty. V tomto případě, ale prvek H_1 již nebude připojen sériově, ale paralelně (obr. 8-1).



Obr. 8-1. Reologický model Zenerovy hmoty

U modelu Zenerovy hmoty je stejná rychlost přetvoření v prvku H_1 a zároveň ve druhé větvi, kde je sériově zapojen pružný a vazký prvek. Platí [13]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta}, \quad (8.1)$$

avšak jednotlivá napětí se v obou větvích sčítají a platí tedy, že

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (8.2)$$

Nám již známý výraz pro přetvoření

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon \quad (8.3)$$

dosazením výrazu (8.3) do rovnice (8.2), snadno odvodíme vztah pro σ_2 . Tedy

$$\sigma_2 = \sigma - E_1 \varepsilon. \quad (8.4)$$

Derivováním výrazu (8.3) a (8.4) získáme potřebné vztahy, které můžeme zpětně dosadit do úvodního vztahu (8.1). Po úpravách dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici. Podrobný postup řešení je uveden následovně:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_1}{dt} &= E_1 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \\
 \frac{d\sigma_2}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} - E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta} \\
 \frac{1}{E_1} \cdot E_1 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{E_2} \left(\frac{d\sigma}{dt} - E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \right) + \frac{1}{\eta} (\sigma - E_1 \varepsilon) \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\eta} (\sigma - E_1 \varepsilon) \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1 \varepsilon}{\eta} \quad / \cdot \eta \\
 \eta \frac{d\varepsilon}{dt} + \eta \frac{E_1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma - E_1 \varepsilon \quad / + E_2 \varepsilon
 \end{aligned}$$

Výsledná diferenciální rovnice, která modeluje Zenerovu hmotu má tvar [13]

$$\underline{\underline{E_1 \varepsilon + \eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma}} \quad (8.5)$$

Při porovnání rovnice (8.5) s diferenciální rovnicí (7.6) vidíme, že dané rovnice jsou obdobné [13].

Podobně jako v předchozích reologických modelech (Kelvinovy hmoty, Maxwellovy kapaliny a Poyntingovy-Thompsonovy hmoty) budeme se i u modelu Zenerovy hmoty zabývat, jak se daný model chová při konstantním přetvoření a napětí.

1) RELAXACE

Při přetvoření ε_0 , které se s časem nemění, nás bude zajímat závislost napětí σ na čase t . Za těchto podmínek z rovnice (8.5) vyplývá, že druhý člen na pravé straně je nulový.

Počáteční podmínky: $\sigma(t=0) = \sigma_0$

$$E_1 \varepsilon_0 = \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma$$

$$E_1 \varepsilon_0 - \sigma = \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\int \frac{E_2}{\eta} dt = \int \frac{d\sigma}{E_1 \varepsilon_0 - \sigma}$$

$$\frac{E_2}{\eta} t + c = -\ln|E_1 \varepsilon_0 - \sigma|$$

(8.6)

Danou konstantu c ze vztahu (8.6) zjistíme po dosazení počátečních podmínek relaxace $\sigma(t=0) = \sigma_0$

$$\boxed{c = -\ln|E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0|},$$

zpětným dosazením vyjádřené hodnoty c do výrazu (8.6) získáme

$$\frac{E_2}{\eta} t + -\ln|E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0| = -\ln|E_1 \varepsilon_0 - \sigma|$$

$$\ln|E_1 \varepsilon_0 - \sigma| - \ln|E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0| = -\frac{E_2}{\eta} t$$

$$\ln \left| \frac{E_1 \varepsilon_0 - \sigma}{E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0} \right| = -\frac{E_2}{\eta} t$$

$$\frac{E_1 \varepsilon_0 - \sigma}{E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0} = \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)$$

$$E_1 \varepsilon_0 - \sigma = (E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0) \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)$$

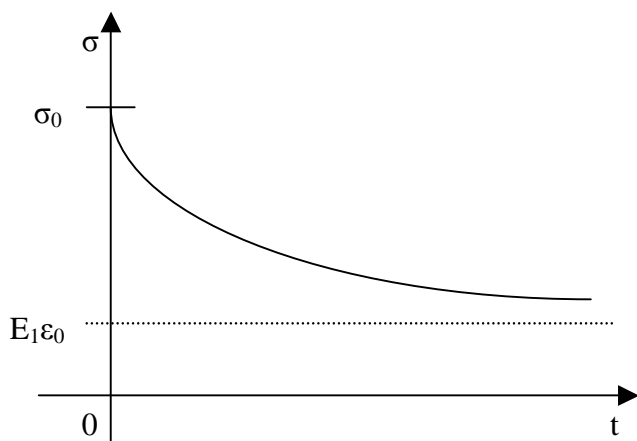
$$-\sigma = (E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0) \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) - E_1 \varepsilon_0$$

$$\sigma = -(E_1 \varepsilon_0 - \sigma_0) \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) + E_1 \varepsilon_0$$

$$\sigma = E_1 \varepsilon_0 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \right] + \sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right)$$

(8.7)

Limitní vyjádření výrazu (8.7) vyjádříme do grafu (obr.8-2), jedná se o mez kam až křivka bude klesat. Křivka relaxace má klesající tendenci. Proč klesající? Režim s konstantním napětím si můžeme přiblížit na příkladu. Natáhneme-li nit' ve vzdálenosti 0,5 m, napětí, které potřebujeme abychom drželi stále stejnou vzdálenost bude klesat, neboť materiál má tendenci odtékat a potřebné napětí po delší době již není tak velké, jak bylo potřebné na začátku při natažení nitě. Zkracování pružiny H_2 , síla klesá a píst se natahuje až se dostane na nulu. Pružina H_1 drží stejnou konstantní sílu, proto limita napětí za nekonečně dlouhou dobu se rovná $E_1\varepsilon_0$.



Obr. 8-2. Reologický model Zenerovy hmoty v režimu relaxace

2) KONSTANTNÍ NAPĚTÍ

Při napětí σ_0 , které se s časem nemění, první člen na pravé straně rovnice (8.5) je roven nule, rovnice se zjednoduší na tvar

$$E_1\varepsilon + \eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma_0 .$$

Pro daný režim jsou platné počáteční podmínky $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$.

$$\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma_0 - E_1\varepsilon \quad (\text{separace proměnných})$$

$$\frac{d\varepsilon}{\sigma_0 - E_1\varepsilon} = \frac{1}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right)} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} \cdot \frac{d\varepsilon}{\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon\right)} &= \frac{1}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} dt \\ -\frac{1}{E_1} \cdot \ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon\right) &= \frac{1}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} t + c. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Ze vztahu (8.8) si vyjádříme hodnotu konstanty c tak, že dosadíme počáteční podmínky $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$,

$$\boxed{c = -\frac{1}{E_1} \cdot \ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0\right)},$$

vyjádřený vztah konstanty c zpětně dosadíme do (8.8) a získáme

$$\begin{aligned} -\frac{1}{E_1} \cdot \ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon\right) &= \frac{1}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} t - \frac{1}{E_1} \cdot \ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0\right) \\ -\frac{1}{E_1} \left[\ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon\right) - \ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0\right) \right] &= \frac{1}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} t \\ \left[\ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon\right) - \ln\left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0\right) \right] &= \frac{-E_1}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} t \\ \ln \left| \frac{\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon}{\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0} \right| &= \frac{-E_1}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} t \\ \frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon &= \left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0 \right) \cdot \exp \left(\frac{-E_1 t}{\eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)} \right) \\ -\varepsilon &= \left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0 \right) \cdot \exp \left(\frac{-E_1 E_2 t}{\eta (E_1 + E_2)} \right) - \frac{\sigma_0}{E_1} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_0}{E_1} - \left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \varepsilon_0 \right) \cdot \exp \left(\frac{-E_1 E_2 t}{\eta (E_1 + E_2)} \right) \end{aligned}$$

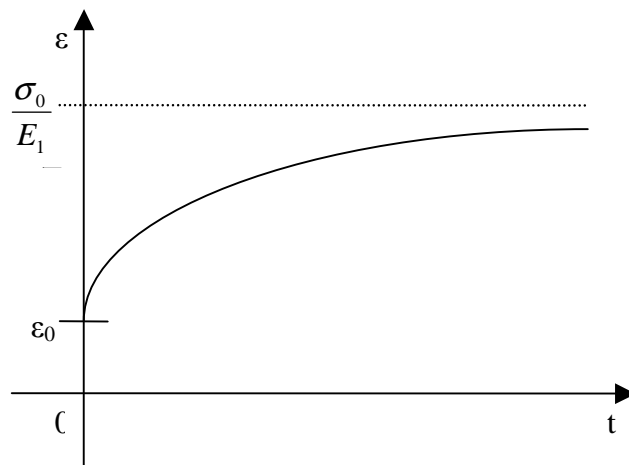
$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} - \frac{\sigma_0}{E_1} \exp\left(\frac{-E_1 E_2 t}{\eta(E_1 + E_2)}\right) + \varepsilon_0 \exp\left(\frac{-E_1 E_2 t}{\eta(E_1 + E_2)}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1} \left[1 - \exp\left(\frac{-E_1 E_2 t}{\eta(E_1 + E_2)}\right) \right] + \varepsilon_0 \exp\left(\frac{-E_1 E_2 t}{\eta(E_1 + E_2)}\right).$$

(8.9)

Limitní hodnota přetvoření při konstantním napětí za nekonečně dlouhou dobu je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_1}.$$

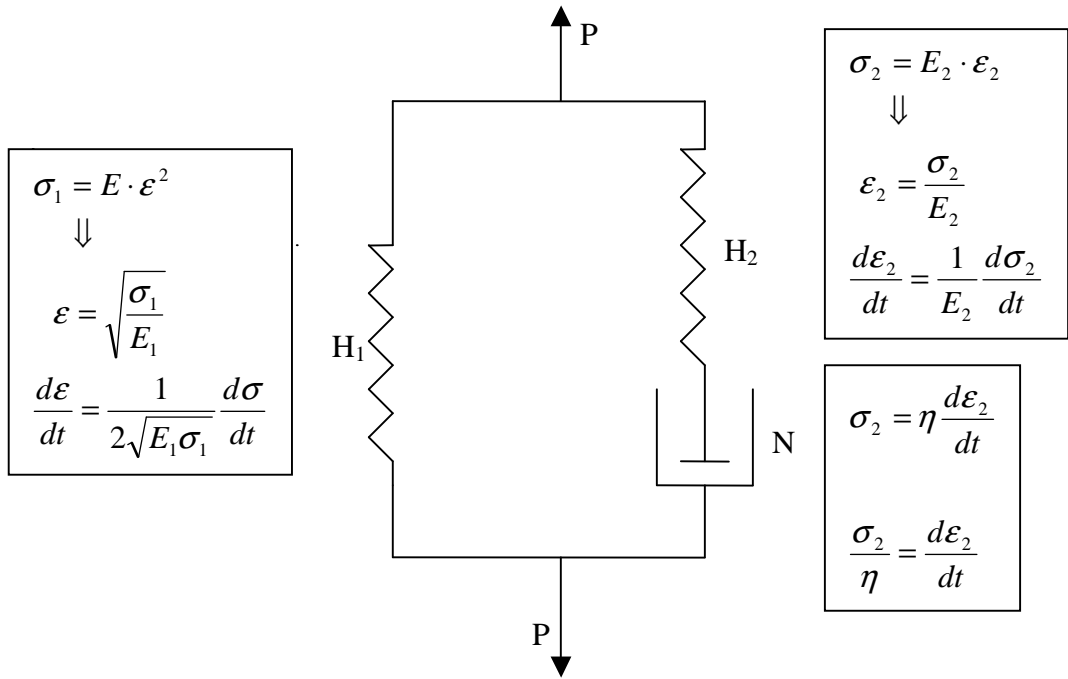


Obr.8-3. Reologický model Zenerovy hmoty v režimu dotváření

8.1. Modifikovaný model Zenerovy hmoty I.

(přetvoření prvku H_1 je úměrné druhé mocnině)

V předchozí kapitole jsme se seznámili s reologickým modelem Zenerovy hmoty s přetvořením u obou pružin přímoúměrnému napětí. Budeme zkoumat chování modifikovaného modelu Zenerovy hmoty, kde přetvoření pružného prvku je úměrné druhé mocnině, nejprve u pružného prvku H_1 , následně u prvku H_2 , popř. u obou pružin.



Obr. 8-4. Přehledné vyjádření modifikovaného modelu Zenerovy hmoty

Modifikovaný model můžeme vyjádřit pomocí diferenciální rovnice. Stejná rychlost přetvoření v prvku H_1 a ve skupině $H_2 - N$, kde vodorovná čárka vyjadřuje spojení prvků H_2 a N v řadě za sebou.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{E_1\sigma_1}} \frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (8.10)$$

Dosadíme-li do vztahu (8.10) výrazy o napětí

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon^2$$

$$\sigma_2 = \sigma - E_1 \varepsilon^2$$

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = 2E_1 \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{d\sigma_2}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} - 2\varepsilon E_1 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

(8.11)

dostáváme po úpravách:
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{E_1\sigma_1}} 2E_1 \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} - 2\varepsilon E_1 \frac{1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\sigma - E_1 \varepsilon^2}{\eta}$$

$$\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{\sigma_1}} \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} - 2\varepsilon \frac{E_1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1 \varepsilon^2}{\eta} \quad / + 2\varepsilon \frac{E_1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 \varepsilon^2}{\eta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{\sigma_1}} \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 \varepsilon^2}{\eta} + 2\varepsilon \frac{E_1}{E_2} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \\
\left(\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{\sigma_1}} \varepsilon + 2\varepsilon \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 \varepsilon^2}{\eta} &= \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \cdot \eta \\
\underline{\underline{\eta \left(\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{\sigma_1}} \varepsilon + 2\varepsilon \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1 \varepsilon^2 = \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma}} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.12}$$

1) RELAXACE

neboli ochabování; režim reologického modelu, při kterém je konstantní přetvoření ε_0 . Vyjádříme si z rovnice (8.12) vztah pro ochabování s počátečními podmínkami $\sigma(t=0) = \sigma_0$. První člen na pravé straně rovnice (8.12) se rovná nule a tedy získáme vztah

$$\eta \left(\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{\sigma_1}} \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + E_1 \varepsilon_0^2 = \sigma$$

Dané vyjádření upravíme tak, abychom získali závislost napětí na čase:

$$\begin{aligned}
\eta \left(\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{\sigma_1}} \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 \frac{E_1}{E_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} &= \sigma - E_1 \varepsilon_0^2 \\
\varepsilon_0 \frac{d\varepsilon}{\sigma - E_1 \varepsilon_0^2} &= \frac{dt}{\eta \left(\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{\sigma_1}} + 2 \frac{E_1}{E_2} \right)}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{E_1} \right) \cdot \ln |\sigma - E_1 \varepsilon_0^2| = \frac{\sqrt{\sigma_1} \cdot E_2}{\eta (E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t + c
\tag{8.13}$$

dosazením počátečních podmínek $\sigma(t=0) = \sigma_0$ do vztahu (8.13) obdržíme hodnotu konstanty c

$$c = \left(-\frac{1}{2E_1} \right) \cdot \ln |\sigma_0 - E_1 \varepsilon_0^2|$$

Vyjádření hodnoty konstanty c , zpětně dosadíme do (8.13) a získáme

$$\left(-\frac{1}{2E_1}\right) \cdot \ln|\sigma - E_1 \varepsilon_0^2| = \frac{\sqrt{\sigma_1} \cdot E_2}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t + \left(-\frac{1}{2E_1}\right) \cdot \ln|\sigma_0 - E_1 \varepsilon_0^2|$$

daný výraz postupně upravíme

$$\left[\ln|\sigma - E_1 \varepsilon_0^2| - \ln|\sigma_0 - E_1 \varepsilon_0^2| \right] = (-2E_1) \frac{\sqrt{\sigma_1} \cdot E_2}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t$$

$$\ln \left| \frac{\sigma - E_1 \varepsilon_0^2}{\sigma_0 - E_1 \varepsilon_0^2} \right| = \frac{-2E_1 E_2 \sqrt{\sigma_1}}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t$$

$$\sigma - E_1 \varepsilon_0^2 = (\sigma_0 - E_1 \varepsilon_0^2) \cdot \exp \left(\frac{-2E_1 E_2 \sqrt{\sigma_1}}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t \right)$$

$$\sigma = (\sigma_0 - E_1 \varepsilon_0^2) \cdot \exp \left(\frac{-2E_1 E_2 \sqrt{\sigma_1}}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t \right) + E_1 \varepsilon_0^2$$

$$\sigma = \sigma_0 \exp \left(\frac{-2E_1 E_2 \sqrt{\sigma_1}}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t \right) - E_1 \varepsilon_0^2 \exp \left(\frac{-2E_1 E_2 \sqrt{\sigma_1}}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t \right) + E_1 \varepsilon_0^2$$

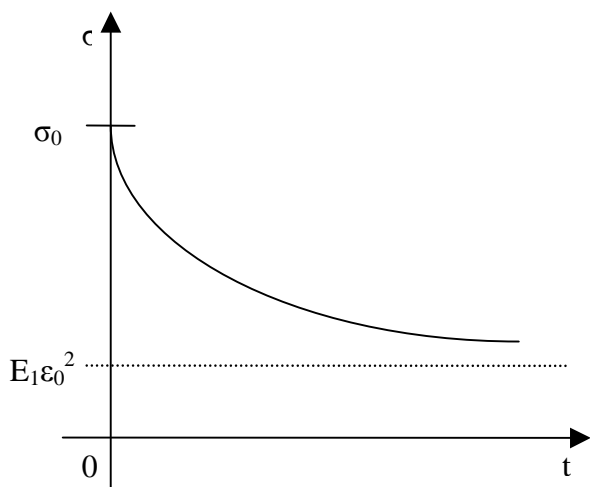
$$\sigma = E_1 \varepsilon_0^2 \left[1 - \exp \left(\frac{-2E_1 E_2 \sqrt{\sigma_1}}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t \right) \right] + \sigma_0 \exp \left(\frac{-2E_1 E_2 \sqrt{\sigma_1}}{\eta(E_2 \sqrt{E_1} + 2E_1 \sqrt{\sigma_1})} t \right)$$

(8.14)

Limitní hodnota výrazu (8.14) za nekonečně dlouhou dobu je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma = E_1 \cdot \varepsilon_0^2.$$

Limitní hodnota vyjadřuje mez, ke které se křivka modifikovaného modelu přibližuje (obr. 8-5).



Obr. 8-5. Modifikovaný model přetváření Zenerovy hmoty

2) KONSTANTNÍ NAPĚTÍ

Další situace, která může u daného modelu nastat, je režim konstantního napětí, kdy nás zajímá vztah přetvoření ε na čase t . Počáteční podmínky jsou stejné jako u předešlých modelů v situaci při konstantním napětí tj. $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$. Vycházíme z rovnice (8.12), v důsledku uvedených podmínek, se první člen na levé straně rovná nule. Platí

$$\begin{aligned} E_1 \varepsilon^2 &= \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma_0 \\ E_1 \varepsilon^2 - \sigma &= \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} \\ \frac{E_2}{\eta} dt &= \frac{d\sigma}{E_1 \varepsilon^2 - \sigma_0} \\ \frac{E_2}{\eta} t + c &= \frac{1}{E_1} \ln |E_1 \varepsilon^2 - \sigma_0| \end{aligned} \quad (8.15)$$

Počáteční podmínky byly předem stanoveny, proto můžeme snadno určit konkrétní hodnotu konstanty c z dané rovnice (8.15).

$$c = \frac{1}{E_1} \ln |E_1 \varepsilon_0^2 - \sigma_0|.$$

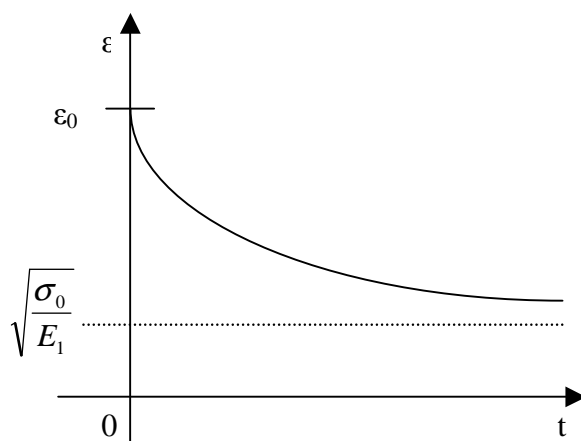
Zpětným dosazením hodnoty konstanty c do rovnice (8.15) získáme vztah

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{\eta} t + \frac{1}{E_1} \ln |E_1 \varepsilon_0^2 - \sigma_0| &= \frac{1}{E_1} \ln |E_1 \varepsilon^2 - \sigma_0| \\ \frac{1}{E_1} \left[\ln |E_1 \varepsilon_0^2 - \sigma_0| - \ln |E_1 \varepsilon^2 - \sigma_0| \right] &= -\frac{E_2}{\eta} t \\ \ln \left| \frac{E_1 \varepsilon_0^2 - \sigma_0}{E_1 \varepsilon^2 - \sigma_0} \right| &= -\frac{E_1 E_2}{\eta} t \\ \frac{E_1 \varepsilon_0^2 - \sigma_0}{E_1 \varepsilon^2 - \sigma_0} &= \exp \left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) \\ E_1 \varepsilon^2 - \sigma_0 &= (E_1 \varepsilon_0^2 - \sigma_0) \exp \left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) \\ \varepsilon^2 &= \frac{1}{E_1} (E_1 \varepsilon_0^2 - \sigma_0) \exp \left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) + \frac{\sigma_0}{E_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \left(\varepsilon_0^2 - \frac{\sigma_0}{E_1} \right) \cdot \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) + \frac{\sigma_0}{E_1} \\
\varepsilon^2 &= \varepsilon_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) - \frac{\sigma_0}{E_1} \cdot \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) + \frac{\sigma_0}{E_1} \\
\varepsilon^2 &= \varepsilon_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) + \frac{\sigma_0}{E_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) \right] \\
\varepsilon &= \sqrt{ \varepsilon_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) + \frac{\sigma_0}{E_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_1 E_2}{\eta} t \right) \right] }
\end{aligned}
\tag{8.16}$$

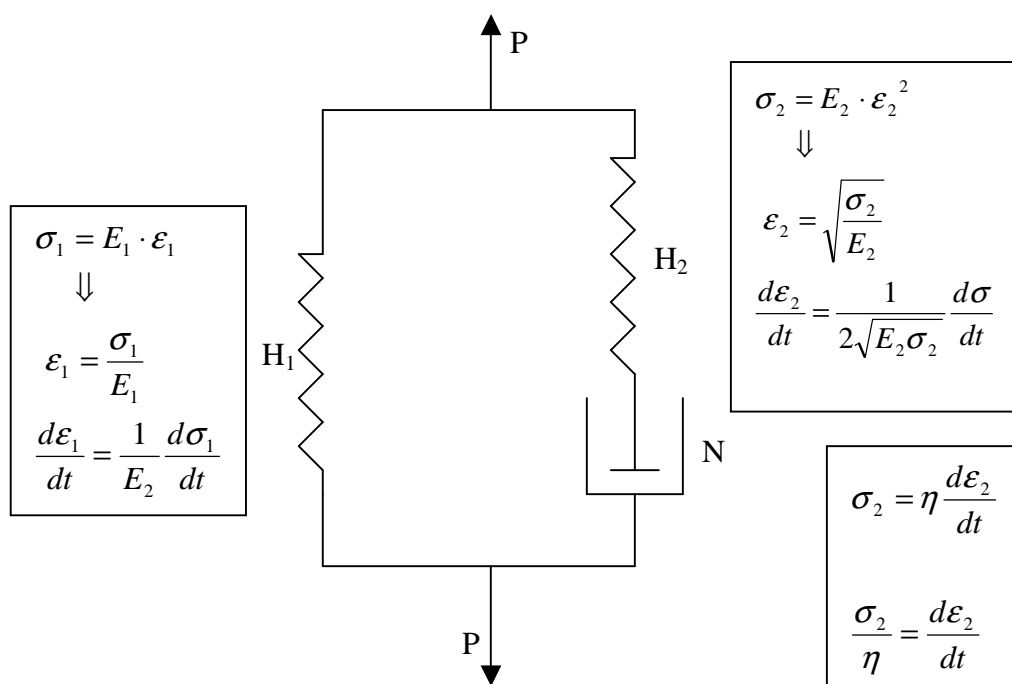
Limitní hodnota přetvoření za nekonečně dlouhou dobu je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \sqrt{\frac{\sigma_0}{E_1}}.$$



Obr. 8-6. Průběh modifikovaného modelu Zenerovy hmoty při konstantním napětí

8.2. Modifikovaný model Zenerovy hmoty II. (přetvoření prvku H_2 je úměrné druhé mocnině)



Obr. 8-7. Znázornění modifikovaného modelu

Modifikovaný model Zenerovy hmoty vyjádříme diferenciální rovnicí. Všechny potřebné údaje o přetvoření a napětí znázorňuje obr. 8-7.

V prvku H_1 a ve skupině $H_2 - N$ je rychlost přetváření stejná.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad / \cdot \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

(8.17)

Z obr. 8-7 vyjádřené vztahy rychlosti přetvoření dosadíme do vztahu (8.17), po úpravách získáme vztah

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{E_2\sigma_2}} \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_2}{\eta},$$

(8.18)

celkové napětí se rovná součtu dílčích napětí

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (8.19)$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 \varepsilon \\ \sigma_2 &= \sigma - E_2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Po dosazení vztahů (8.20) do výrazu (8.18) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{E_2(\sigma - E_2 \varepsilon)}} \left(\frac{d\sigma}{dt} - E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} \right) + \frac{\sigma - E_2 \varepsilon}{\eta} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon}} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_2}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon}} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_2 \varepsilon}{\eta} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon}} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2 \varepsilon}{\eta} &= \frac{1}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \\ \left(1 + \frac{E_2}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon}} \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2 \varepsilon}{\eta} &= \frac{1}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \end{aligned} \quad (8.21)$$

1) RELAXACE

Při stálém přetvoření ε_0 získáme z rovnice (8.21) vztah pro ochabování za daných počátečních podmínkách, když napětí $\sigma(t=0) = \sigma_0$.

$$\left(1 + \frac{E_2}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon_0}} \right) \frac{d\varepsilon_0}{dt} + \frac{E_2 \varepsilon_0}{\eta} = \frac{1}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon_0}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

První člen rovnice se rovná nule, neboť derivace konstanty je nula. Získáme jednodušší vztah

$$\begin{aligned} \frac{E_2 \varepsilon_0}{\eta} &= \frac{1}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon_0}} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \\ \frac{E_2 \varepsilon_0}{\eta} - \frac{\sigma}{\eta} &= \frac{1}{2\sqrt{E_2 \sigma - E_2^2 \varepsilon_0}} \frac{d\sigma}{dt} \quad (\text{separace proměnných}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int dt &= \int \frac{1}{2\sqrt{E_2\sigma - E_2^2\varepsilon_0}} \frac{d\sigma}{\frac{E_2\varepsilon_0}{\eta} - \frac{\sigma}{\eta}} \\
\int dt &= \frac{\eta}{2} \cdot \int \frac{1}{3E_2^3\varepsilon_0^2\sigma - 2E_2^2\sigma^2\varepsilon_0 - E_2^4\varepsilon_0^3 + E_2\sigma^3} d\sigma \\
\frac{2}{\eta}t &= \int \frac{1}{3E_2^3\varepsilon_0^2\sigma - 2E_2^2\sigma^2\varepsilon_0 - E_2^4\varepsilon_0^3 + E_2\sigma^3} d\sigma \\
t &= \frac{\eta}{2} \int \frac{1}{3E_2^3\varepsilon_0^2\sigma - 2E_2^2\sigma^2\varepsilon_0 - E_2^4\varepsilon_0^3 + E_2\sigma^3} d\sigma .
\end{aligned}
\tag{8.22}$$

2) KONSTANTNÍ NAPĚTÍ

Při napětí σ_0 , které se nemění s časem, z rovnice (8.21) se první člen na pravé straně rovnice rovná nule. Počáteční podmínky pro režim ochabování je $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$. Dosadíme-li dané podmínky režimu do rovnice (8.21) získáme zjednodušený vztah

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{E_2}{2\sqrt{E_2\sigma_0 - E_2^2\varepsilon}}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2\varepsilon}{\eta} &= \frac{\sigma_0}{\eta} \quad \bigg/ - \frac{E_2\varepsilon}{\eta} \\
\left(1 + \frac{E_2}{2\sqrt{E_2}\sqrt{\sigma_0 - E_2\varepsilon}}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{\eta}(\sigma_0 - E_2\varepsilon)
\end{aligned}$$

výraz na levé straně upravíme:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\sqrt{E_2}}{2\sqrt{\sigma_0 - E_2\varepsilon}}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{1}{\eta}(\sigma_0 - E_2\varepsilon) \\
\int \frac{1}{\sigma_0 - E_2\varepsilon} d\varepsilon + \int \frac{\sqrt{E_2}}{2(\sigma_0 - E_2\varepsilon)\sqrt{\sigma_0 - E_2\varepsilon}} d\varepsilon &= \int \frac{1}{\eta} dt \\
\int \frac{1}{\sigma_0 - E_2\varepsilon} d\varepsilon + \frac{\sqrt{E_2}}{2} \int \frac{1}{(\sigma_0 - E_2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} d\varepsilon &= \int \frac{1}{\eta} dt
\end{aligned}$$

Pravou stranu rovnice integrujeme pomocí vzorců uvedených v publikaci [1]:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a+bx} &= \frac{1}{b} \ln|a+bx|; \quad a = \sigma_0, b = -E_2 \\
\int \frac{dx}{(a^2 - b^2x)x^{\frac{3}{2}}} &= \frac{-2}{a^2\sqrt{x}} + \frac{b}{a^3} \ln \left| \frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}} \right|; \quad a = \sqrt{\sigma_0}, b = \sqrt{E_2}
\end{aligned}
}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{E_2} \ln|\sigma_0 - E_2 \varepsilon| + \frac{\sqrt{E_2}}{2} \left[-\frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}} \ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \right| \right] = \frac{1}{\eta} t \\
& -\frac{1}{E_2} \ln|\sigma_0 - E_2 \varepsilon| - \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{E_2}{2\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}} + \frac{\sqrt{E_2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \right| = \frac{1}{\eta} t + c
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Dosadíme-li do předchozí rovnice (8.23) počáteční podmínky $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0$, můžeme vyjádřit hodnotu konstanty c

$$\boxed{c = -\frac{1}{E_2} \ln|\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0| - \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{E_2}{2\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}} + \frac{\sqrt{E_2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}} \right|}.$$

Vyjádření hodnoty konstanty c zpětně dosadíme do vztahu (8.23) a získáme

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{E_2} \ln|\sigma_0 - E_2 \varepsilon| - \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{E_2}{2\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}} + \frac{\sqrt{E_2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \right| = \\
& = \frac{1}{\eta} t - \frac{1}{E_2} \ln|\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0| - \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{E_2}{2\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}} + \frac{\sqrt{E_2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}} \right| \\
& \frac{\sqrt{E_2}}{2} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}} \right| \right) = \\
& = \frac{1}{\eta} t + \frac{1}{E_2} (\ln|\sigma_0 - E_2 \varepsilon| - \ln|\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0|) - \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \right| &= \frac{2}{\sqrt{E_2}} \frac{1}{E_2} \ln \left| \frac{\sigma_0 - E_2 \varepsilon}{\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0} \right| - \frac{2}{\sqrt{E_2}} \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{2}{\sqrt{E_2}} \frac{\sqrt{E_2}}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \\
&+ \frac{2}{\sqrt{E_2}} \frac{1}{\eta} t
\end{aligned}$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \right| = \frac{2}{E_2 \sqrt{E_2}} \ln \left| \frac{\sigma_0 - E_2 \varepsilon}{\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0} \right| - \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{2t}{\eta \sqrt{E_2}}$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \right| - \ln \left| \frac{\sigma_0 - E_2 \varepsilon}{\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0} \right|^{\frac{2}{E_2 \sqrt{E_2}}} = \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{2t}{\eta \sqrt{E_2}} - \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}}$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\sigma_0 - E_2 \varepsilon}{\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0} \right)^{\frac{2}{E_2 \sqrt{E_2}}} \right| = \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{2t}{\eta \sqrt{E_2}} - \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}}$$

$$\frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\sigma_0 - E_2 \varepsilon}{\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0} \right)^{\frac{2}{E_2 \sqrt{E_2}}} = \exp \left(\frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{2t}{\eta \sqrt{E_2}} - \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \right)$$

$$\frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon}} = \left(\frac{\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\sigma_0} - \sqrt{E_2} \sqrt{\varepsilon_0}} \right) \left(\frac{\sigma_0 - E_2 \varepsilon}{\sigma_0 - E_2 \varepsilon_0} \right)^{-\frac{2}{E_2 \sqrt{E_2}}} \cdot \exp \left(\frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon}} + \frac{2t}{\eta \sqrt{E_2}} - \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \right)$$

Další úpravy výrazu, abychom získali vyjádření přetvoření na čase, není možné. Členy s přetvořením jsou ve složitých vztazích, proto daný výraz ponecháme v tomto tvaru. Řešením je implicitní vztah mezi přetvořením ε a časem t .

9. Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámení se základními reologickými modely a vytvoření nových modelů, které by vystihovaly chování netkaných textilií v zátěžových a relaxačních testech. Z této práce dále vyplývá možnost pro další využití modelů v textilních laboratořích pro výzkumné účely. Zkoumání bylo zaměřeno především na modifikaci základních dvou reologických modelů viskoelastické látky. Viskoelastická látka kombinuje vlastnosti viskózní (newtonské) kapaliny a elastické (hookovské) pevné látky, takže je na pomezí mezi kapalinami a pevnými látkami. Je tedy objektem reologie, která neuznává ostrou hranici mezi kapalinou a pevnou látkou.

První viskoelastický model se nazývá Kelvinův, druhý Maxwellův model. Tyto dva modely charakterizují kombinaci vlastností hookovské látky (pružiny, matematicky vyjádřené Hookovým zákonem) a newtonovské látky (pístu, jehož reologické chování lze vyjádřit Newtonovým viskózním zákonem).

Hlavním cílem nebylo vystihnout detailní průběh a podstatu závislosti určitých veličin, ale vystihnout charakter této závislosti. Nejdříve jsme prozkoumali chování materiálu u nejjednodušších reologických modelů Kelvinovy hmoty a Maxwellovy kapaliny a k nim uvedené vztahy, které jsou převzaty z literatury [13]. Na základě prostudování dostupných informací, jak lze chování modelu matematicky vyjádřit, jsme sestavili diferenciální rovnici, vyřešili ji a prozkoumali chování modelu v konkrétních mechanických režimech.

Z rozboru základních modelů vyplývá, že Maxwellův model, spojení vazkého a pružného prvku sériově, nejlépe modeluje děj označovaný pod názvem relaxace napětí neboli zmenšování napětí při konstantní deformaci. Kelvinův model, paralelní spojení vazkého a pružného elementu, je zcela nevhodný pro relaxaci napětí, neboť napětí, které v něm vznikne při deformaci, se s časem nemění.

Ukázali jsme, že u reálných viskoelastických látek nemusí být splněn ani předpoklad přímé úměrnosti mezi deformací a napětím v daném čase. Pro vystižení chování takových látek je třeba vybudovat nelineární teorii viskoelasticity, která však je matematicky náročná. Znatelná odlišnost modifikovaných modelů od základních vidíme na tvaru křivek závislosti napětí a deformace na čase. Jednoduché reologické modely popisují lineární závislost vyjádřenou vzorcem $\sigma = k \cdot \varepsilon$, kdežto modifikované modely křivky konkávního nebo konvexního tvaru v souvislosti se zavedením nelineárního prvku ve vztahu závislosti napětí na deformaci $\sigma = k \cdot \varepsilon^2$.

Detailním rozбором jednoduchých viskoelastických modelů jsme získali představu o jejich vlivu na chování složitějších reologických modelů. Základní vztahy složených modelů, které vznikly spojením Kelvinovy hmoty nebo Maxwellovy kapaliny, takzvaný Zenerův a Poyntingův-Thompsonův model, byly převzaty z literatury [13]. Sestrojili jsme modifikované modely s nelineární závislostí mezi napětím a deformací, vyjádřili chování modelu diferenciální rovnicí a jejím vyřešením získali vztah závislosti napětí na čase nebo deformace na čase.

10. Literatura

- [1] Dwight, B., H.: Tables Of Integrals And Other Mathematical Data. Ruský překlad. Nauka, Moskva 1973.
- [2] Gabriel, S. - Gabrielová, L. - Skokan, V.: Diferenciální rovnice. Praha, ČVUT 1972. ISBN 57-518-78.
- [3] Jirsák, O.: Netkané textilie. Liberec, VŠST 1993. ISBN 80-7083-115-4.
- [4] Karjakin, N., I. – Bystrov, K., N. – Kirejev, P., S.: Přehled fyziky. Praha, SNTL 1970. ISBN 04-015-69.
- [5] Kolektiv autorů: Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz. Praha, Prometheus 1999. ISBN 80-7196-151-5.
- [6] Košková, B.: Struktura a vlastnosti vláken. Liberec, VŠST 1989. ISBN.55-817-89.
- [7] Lepil, O.: Malý lexikon fyziky. Praha, Prometheus 1995. ISBN 80-85849-77-1.
- [8] Mevald, J.: Pružnost a pevnost. Liberec, VŠST 1979. ISBN 55-808-79.
- [9] Nekvinda, M.: Matematika II – Diferenciální rovnice. Liberec, TU 2000. ISBN 80-7083-374-2.
- [10] Přívratská, J. – Jirsák, O. – Bharanitharam, R.: Maxwell-Kelvin Model for Highloft Materials, In.: Proceedings of PANM 12, (v tisku).
- [11] Rektorys, K. a kol.: Přehled užití matematiky. Praha, SNTL 1973. ISBN 04-001-73
- [12] Rychnovský, R.: Obyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení. Praha, SNTL 1963. ISB 04-953-63.
- [13] Sobotka, Z.: Reologie hmot a konstrukcí. Praha, Academia 1981. ISBN 21-057-81.
- [14] Svoboda, E. a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Praha, Prometheus 2001. ISBN 80-7196-116-7.
- [15] Tumajer, F. - Fabiánová, H.: Matematika II – Diferenciální rovnice, funkce více proměnných, nekonečné řady. Liberec, VŠST 1991. ISBN 55-820-91.
- [16] Urgošík, B.: Fyzika. Praha, SNTL 1987. ISBN 04-320-87.